

Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie
Wydział Budownictwa i Architektury

Małgorzata Abramowicz

**Modelowanie drgań przestrzennych
i identyfikacja parametrów dyskretnych
modeli stalowo-betonowych belek
zespolonych**

Rozprawa doktorska

Promotor: *prof. dr hab. inż. Stefan Berczyński*

Promotor pomocniczy: *dr inż. Tomasz Wróblewski*

Szczecin, 2014

Spis treści

SPIS TREŚCI	2
STRESZCZENIE	4
WYKAZ OZNACZEŃ	8
1. WPROWADZENIE.....	11
1.1. Wstęp	11
1.2. Przegląd stanu zagadnienia	13
1.3. Teza, cel i zakres pracy	17
2. BADANIA DOŚWIADCZALNE CHARAKTERYSTYK DYNAMICZNYCH.....	19
2.1. Obiekt badań	19
2.2. Stanowisko badawcze i metodyka badań	22
2.3. Podstawy eksperymentalnej analizy modalnej.....	23
2.4. Metodyka badań doświadczalnych	25
2.5. Badania doświadczalne belek zespolonych	29
2.6. Badania doświadczalne płyty i dwuteownika IPE160	36
3. MODEL DRGAŃ PRZESTRZENNYCH BELEK ZESPOLONYCH W KONWENCJI METODY SZTYWNYCH ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH..	45
3.1. Model przestrzenny SES - założenia ogólne.....	45
3.2. Model przestrzenny SES płyty.....	49
3.3. Model przestrzenny SES kształtownika stalowego.....	56
3.4. Model przestrzenny SES belki zespolonej	62
4. ALGORYTMY IDENTYFIKACJI PARAMETRÓW MODELI DRGAŃ BELEK ZESPOLONYCH.....	67
4.1. Algorytm identyfikacji I	67
4.2. Algorytm identyfikacji II	70
4.3. Eksperymenty numeryczne	74
4.4. Ocena wrażliwości charakterystyk dynamicznych na zmianę estymowanych parametrów	76
5. ESTYMACJA PARAMETRÓW MODELU	89
5.1. Estymacja parametrów modelu belki zespolonej – <i>algorytm identyfikacji I</i>	89
5.2. Estymacja parametrów modelu belki zespolonej – <i>algorytm identyfikacji II</i>	102
6. ZASTOSOWANIE METODY ESTYMACJI PARAMETRÓW MODELI DO DETEKCJI USZKODZEŃ – OBLICZENIA SYMULACYJNE	110

7. WNIOSKI I KIERUNKI DALSZYCH PRAC.....	115
BIBLIOGRAFIA.....	117
ZAŁĄCZNIK A.....	121
Spis tabel.....	121
ZAŁĄCZNIK B.....	129
Spis rysunków	129

MAŁGORZATA ABRAMOWICZ

**MODELOWANIE DRGAŃ PRZESTRZENNYCH I IDENTYFIKACJA PARAMETRÓW
DYSKRETNYCH MODELI STALOWO-BETONOWYCH BELEK ZESPOLONYCH**

Streszczenie

Praca doktorska poświęcona jest tematyce modelowania drgań przestrzennych stalowo-betonowych belek zespolonych. Konstrukcje tego typu są powszechnie stosowane jako elementy stropów w budynkach oraz jako główne dźwigary nośne konstrukcji mostowych. Głównym celem rozprawy doktorskiej było opracowanie modelu przestrzennego belek stalowo-betonowych oraz metody estymacji parametrów modelu, to znaczy: współczynników sztywności i tłumienia.

Dyskretny, przestrzenny model obliczeniowy belki zespolonej opracowano w konwencji metody sztywnych elementów skończonych. Zastosowanie metody sztywnych elementów skończonych pozwala na efektywne wyznaczanie właściwości dynamicznych tego typu konstrukcji. Wybór techniki modelowania podyktowany był pozytywnymi efektami wcześniej prowadzonych prac modelowych z wykorzystaniem płaskich modeli sztywnych elementów skończonych. Niestety modele płaskie pozwalają na analizę jedynie wybranych form drgań konstrukcji: drgań giętnych pionowych i wzdłużnych. Opracowany model przestrzenny pozwala na analizę form drgań jak w modelu płaskim oraz form drgań skrętnych, giętnych poziomych, poprzecznych drgań pasa dolnego kształtownika stalowego i innych, w których występują składowe drgań na kierunku poziomym, prostopadłym do osi belki. Ze względu na brak komercyjnego oprogramowania bazującego na metodzie sztywnych elementów skończonych, na potrzeby pracy opracowano własny program w środowisku programowania MATLAB.

W pracy przedstawiono również wyniki badań doświadczalnych przeprowadzonych na trzech belkach zespolonych, płycie żelbetowej oraz kształtowniku stalowym. Trzy badane belki różniły się między sobą gęstością rozmieszczenia elementów zespalających, którymi były rozmieszczone parami stalowe kołki z łbami – najczęściej spotykany w praktyce rodzaj zespolenia. Badania mające na celu określenie charakterystyk dynamicznych takich jak częstotliwości, postaci drgań, współczynników tłumienia modalnego oraz częstotliwościowych funkcji przejścia prowadzono z zastosowaniem wymuszenia impulsowego.

Wyniki przeprowadzonych badań doświadczalnych wykorzystane zostały podczas estymacji parametrów modelu, którą prowadzono z wykorzystaniem nie tylko częstotliwości drgań własnych, ale również wykorzystując określone w trakcie badań postaci drgań własnych oraz przebiegi częstotliwościowych funkcji przejścia. Założono, że estymacji poddane zostaną następujące parametry opisujące sztywność modeli: zastępczy dynamiczny moduł sprężystości podłużnej betonu E_c , sztywność zespolenia na ścinanie, to jest translacyjna na kierunku stycznym do płaszczyzny styku stal-beton

K_h , sztywność osiowa, czyli translacyjna sztywność zespolenia na kierunku normalnym do styku stal-beton K_v oraz sztywność rotacyjna na kierunku wokół osi belki $K_{R,x}$. Estymowano również właściwości tłumiące belki opisywane za pomocą współczynników strat określanych niezależnie dla betonu η_c , stali η_s i zespolenia η_z .

W ramach pracy opracowano dwa algorytmy identyfikacji parametrów. Jeden bazujący na porównaniu doświadczalnych i obliczeniowych częstotliwości oraz postaci drgań własnych. Drugi na podstawie porównania doświadczalnych i obliczeniowych częstotliwościowych funkcji przejścia. W celu pokazania przydatności i weryfikacji zaproponowanych algorytmów oraz opracowanego przestrzennego modelu zastosowano go do wykrywania wielkości uszkodzenia. Analizowano uszkodzenia kołków stalowych zespalających płytę żelbetową z kształtownikiem stalowym. Przeprowadzono badania symulacyjne, które wykazały dużą skuteczność opracowanych algorytmów.

MALGORZATA ABRAMOWICZ

MODELLING OF SPATIAL VIBRATION AND PARAMETER IDENTIFICATION OF DISCRETE MODELS FOR STEEL-CONCRETE COMPOSITE BEAMS

Summary

The doctoral dissertation addresses the issues of modelling spatial vibration of steel-concrete composite beams which are very often used as main elements of composite floors or in bridge engineering as main carrying girders. The main aim of the dissertation is to develop a spatial model of steel-concrete composite beams and a method of its parameter estimation, including stiffness and damping characteristics.

A discrete, spatial, computational model for a steel-concrete composite beam was developed using the Rigid Finite Element Method. RFEM enables effective determination of dynamic properties of beams. The modelling methodology was chosen following encouraging results of previous modelling studies conducted with 2D RFEM models. However, 2D finite element models can be used to analyse only some modes of vibrations: flexural vertical and longitudinal vibrations. The 3D model presented in the dissertation enables to determine, apart from those modes mentioned above, torsional, flexural horizontal and transverse vibration of the bottom flange of a steel section as well as other vibration modes with components in the horizontal direction, perpendicular to the beam's axis. Since no commercially produced RFEM-based software is available, an original program for MATLAB environment was developed.

The study provides experimental results for three composite beams, a reinforced concrete slab and a steel section. The three beams had a different density distribution of steel connectors - headed studs which are commonly used connecting elements. Analysis was focused on determining dynamic characteristics, including frequency, vibration modes, modal damping coefficients and frequency response function using impulse excitation.

Experimental results were used to estimate model parameters. The estimation was conducted using natural frequencies as well as modes of vibration and frequency response function determined in analysis. The following parameters defining model stiffness were assumed to be estimated: substitute longitudinal modulus of elasticity of reinforced concrete E_c , *shearing stiffness* of connecting elements, i.e. translational stiffness in tangential direction to steel-concrete interface K_h , *axial stiffness* of connecting elements, i.e. translational stiffness in normal direction to steel-concrete interface K_v and rotational stiffness of connecting elements around beam axis $K_{R,X}$. Damping properties of the beam defined with loss ratio η were estimated independently for concrete η_c , steel η_s , and connection η_z .

Two algorithms of parameter identification were developed. The first one is based on the comparison of experimental and calculated frequencies and natural vibration modes. The second one is based on the comparison of experimental and calculated frequency response functions. To validate the algorithms and to demonstrate the usefulness of the 3D model, it was used to detect size of damage. Analysis was focused on damage of steel connectors that join the reinforced concrete slab with the steel section. Simulation of damage detection confirmed high effectiveness of the developed algorithms.

Wykaz oznaczeń

Duże litery łacińskie

A	–	pole przekroju
A_r, A_r^*	–	reszty modalne
A_s	–	pole powierzchni kształtownika stalowego
$\mathbf{A}$	–	macierz ograniczeń liniowych nierównościowych
$\mathbf{A}_{eq}$	–	macierz ograniczeń liniowych równościowych
B	–	szerokość belki
$\mathbf{C}$	–	macierze tłumienia
D	–	szywność płyty na zginanie
D_1	–	stała
E_c	–	dynamiczny zastępczy moduł sprężystości podłużnej betonu
E_s	–	moduł sprężystości podłużnej dla stali
$\mathbf{F}$	–	wektor sił uogólnionych
$\mathbf{F}(s), \mathbf{F}(j\omega)$	–	transformacja Laplace'a wymuszenia
G_c	–	dynamiczny zastępczy moduł sprężystości poprzecznej betonu
G_s	–	moduł sprężystości poprzecznej dla stali
$\mathbf{G}(j\omega)$	–	macierz inertancji
$\mathbf{H}(s), \mathbf{H}(j\omega)$	–	macierz podatności dynamicznej
J_{Ts}	–	wskaźnik sztywności przekroju na skręcanie dla kształtownika stalowego
J_X	–	moment bezwładności względem osi X
J_Y	–	moment bezwładności względem osi Y
J_{Ys}	–	moment bezwładności przy zginaniu względem osi Y kształtownika stalowego
J_Z	–	moment bezwładności względem osi Z
J_{Zs}	–	moment bezwładności przy zginaniu względem osi Z kształtownika stalowego
$\mathbf{K}$	–	macierze sztywności
K_h	–	sztywność zastępcza pojedynczego EST na kierunku osi X i Y
K_v	–	sztywność osiowa zastępcza pojedynczego EST na kierunku osi Z
$K_{R,X}$	–	sztywność rotacyjna zastępcza pojedynczego EST względem osi X
L	–	długość belki
L_s	–	długość belki stalowej
L_c	–	długość płyty żelbetowej
$\mathbf{M}$	–	macierze bezwładności
$\mathbf{P}$	–	wektor sił wymuszających
$\mathbf{Q}(s), \mathbf{Q}(j\omega)$	–	transformacja Laplace'a odpowiedzi układu
$\mathbf{S}^{(ik)}$	–	blok współrzędnych zamocowania EST o numerze k do SES o numerze i
$S_y(z)$	–	moment statyczny części odciętej z pola przekroju względem osi Y
X, Y, Z	–	oznaczenie osi głównych belki zespolonej
$X_{SES}^{(i)}, Y_{SES}^{(i)}, Z_{SES}^{(i)}$	–	niezależny układ osi głównych odniesienia dla każdego SES-a o numerze i
$X_{EST}^{(k)}, Y_{EST}^{(k)}, Z_{EST}^{(k)}$	–	niezależny własny układ osi głównych dla każdego EST-a o numerze k
$\mathbf{Z}(s), \mathbf{Z}(j\omega)$	–	macierz sztywności dynamicznej
$\mathbf{Z}_{ad}(s)$	–	jest to macierz dołączona do macierzy $\mathbf{Z}(s)$

Małe litery łacińskie

$b(z)$	– szerokość przekroju względem osi Z
$\mathbf{b}$	– wektor ograniczeń
$\mathbf{b}_{eq}$	– wektor ograniczeń liniowych
$\mathbf{c}$	– nieliniowe ograniczenia nierównościowe
$\mathbf{c}_{eq}$	– nieliniowe ograniczenie równościowe
f_i	– częstotliwość i -tej postaci drgań własnych
$f_{i,g}$	– częstotliwość i -tej postaci drgań własnych formy giętej
$f_{i,o}$	– częstotliwość i -tej postaci drgań własnych formy osiowej
$f_{i,pd}$	– częstotliwość i -tej postaci drgań własnych pasa dolnego kształownika
$f_{i,s}$	– częstotliwość i -tej postaci drgań własnych formy skrętnej
h_c	– grubość płyty żelbetowej
h_s	– wysokość kształownika stalowego
m_c	– masa płyty żelbetowej
m_s	– masa kształownika stalowego
$\mathbf{q}$	– wektor przemieszczenia masy
$\dot{\mathbf{q}}$	– wektor prędkości masy
$\ddot{\mathbf{q}}$	– wektor przyspieszenia masy
s	– zmienna zespolona, $s = j\omega$
$\bar{\mathbf{w}}^{(ik)}$	– współrzędne wektora przemieszczenia SES o numerze i do punktu zamocowania EST o numerze k
w_f	– waga dopasowania częstotliwości drgań własnych
w_φ	– waga dopasowania postaci drgań własnych
$\mathbf{x}$	– wektor zmiennych decyzyjnych
$\mathbf{x}_L$	– wektor ograniczeń dolnych na wartości zmiennych niezależnych $\mathbf{x}$
$\mathbf{x}_U$	– wektor ograniczeń górnych na wartości zmiennych niezależnych $\mathbf{x}$

Litery greckie

$\rho_c^{(i)}$	– gęstość materiału płyty żelbetowej
ρ_s	– gęstość masy materiału SES – gęstość stali
η	– współczynnik strat
ω	– częstotliwość drgań
ν_c	– liczba Poissona dla betonu
ν_s	– liczba Poissona dla stali
$\varphi_{i,g}$	– i -ta postać drgań własnych formy giętej
$\varphi_{i,pd}$	– i -ta postać drgań własnych pasa dolnego kształownika
$\varphi_{i,s}$	– i -ta postać drgań własnych formy skrętnej
η_c	– współczynników strat betonu
η_s	– współczynników strat stali
η_z	– współczynników strat zespolenia
λ_r, λ_r^*	– wartości własne
ψ_r, ψ_s	– wektory modalne $\mathbf{r}$ i $\mathbf{s}$ (postacie drgań)
χ	– współczynnik kształtu Timoshenki
χ_Y	– współczynnik kształtu przekroju Timoshenki przy ścinaniu wzdłuż osi Y
χ_Z	– współczynnik kształtu przekroju Timoshenki przy ścinaniu wzdłuż osi Z
$\Theta^{(ik)}$	– blok współczynników kierunkowych

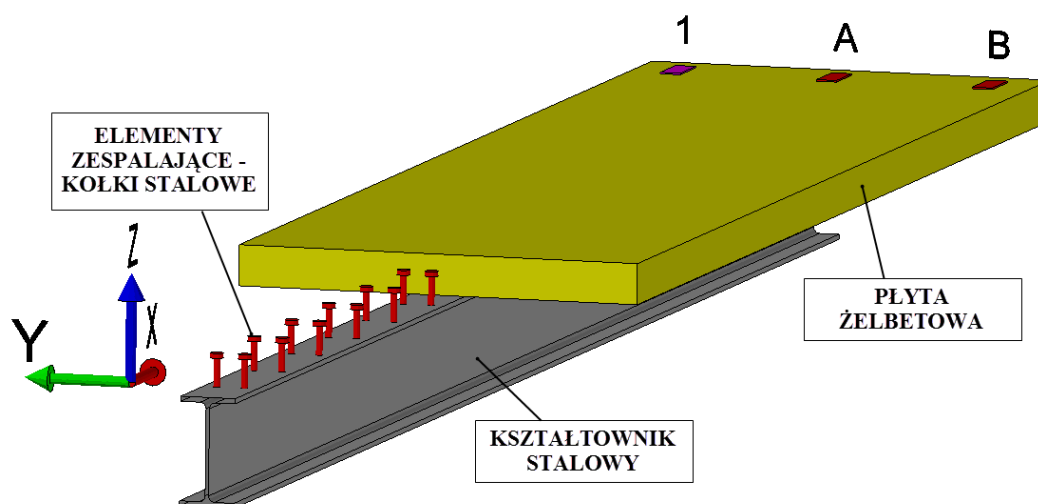
Akronimy

SES	–	Sztywny Element Skończony
EST	–	Element Sprężysto Tłumiący
MES	–	Model Elementów Skończonych
MAC	–	Modal Assurance Criterium
AEM	–	Analog Equation Method
ETR	–	Energy Transfer Ratio
SHM	–	Structural Health Monitoring
SQP	–	Sequential Quadratic Programming
FRAC	–	Frequency Response Assurance Criterion

1. Wprowadzenie

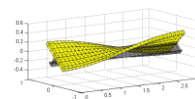
1.1. Wstęp

Element zespolony powstaje w wyniku trwałego połączenia ze sobą dwóch lub więcej elementów konstrukcyjnych, wykonanych z materiałów o różnych właściwościach. Przykładem tego typu konstrukcji jest stalowo-betonowa belka zespolona. Pojęcie belki zespolonej rozumiane jest jako element składający się ze stalowego kształtownika (walcowanego lub spawanego) zespolonego z opierającą się na nim płytą żelbetową. Współpracę elementów zapewniają stalowe elementy zespalające przyspawane do pasa górnego kształtownika przed wykonaniem płyty żelbetowej (Rys. 1.1). Belki tego typu stosowane są najczęściej jako elementy stropów w budownictwie cywilnym i przemysłowym oraz jako dźwigary nośne w budownictwie mostowym.

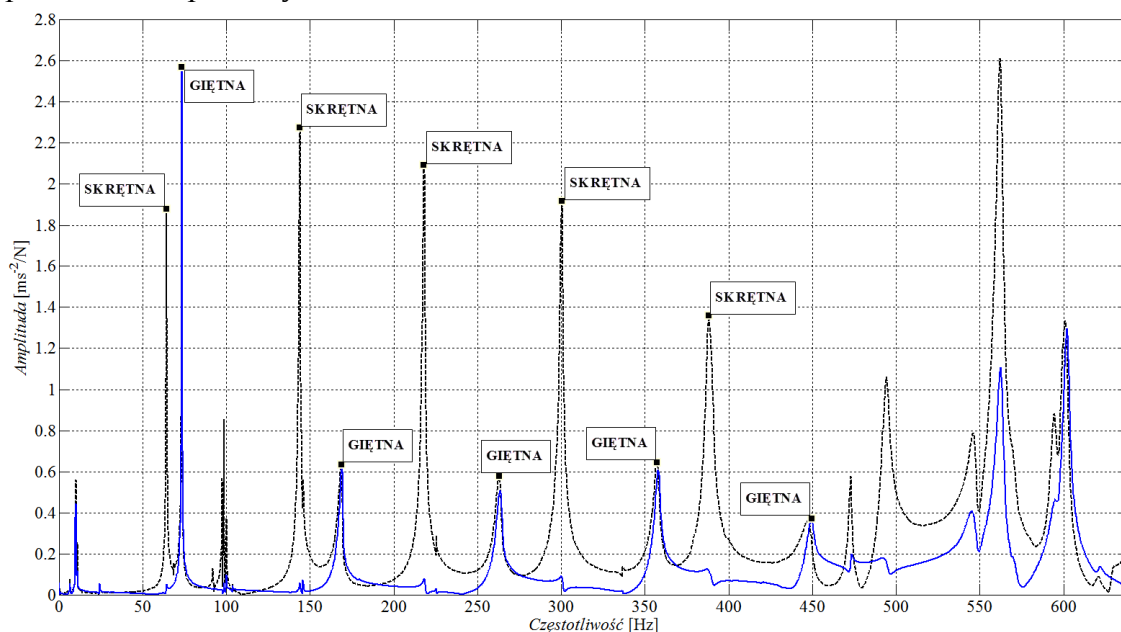


Rys. 1.1 Belka zespolona stalowo-betonowa – schemat ogólny

Podstawową formą drgań jaką należy rozpatrywać podczas analizy tego typu konstrukcji są drgania giętne, pionowe (ruch belki odbywa się w płaszczyźnie X-Z). Analizując tylko takie formy drgań można stosować model płaski, w którym płytę żelbetową traktuje się jako belkę o przekroju prostokątnym. Model taki nie daje jednak możliwości wyznaczania postaci i charakterystyk częstotliwościowych drgań skrętnych, które leżą w tym samym paśmie częstotliwości (Rys. 1.2) i mają również istotny wpływ na

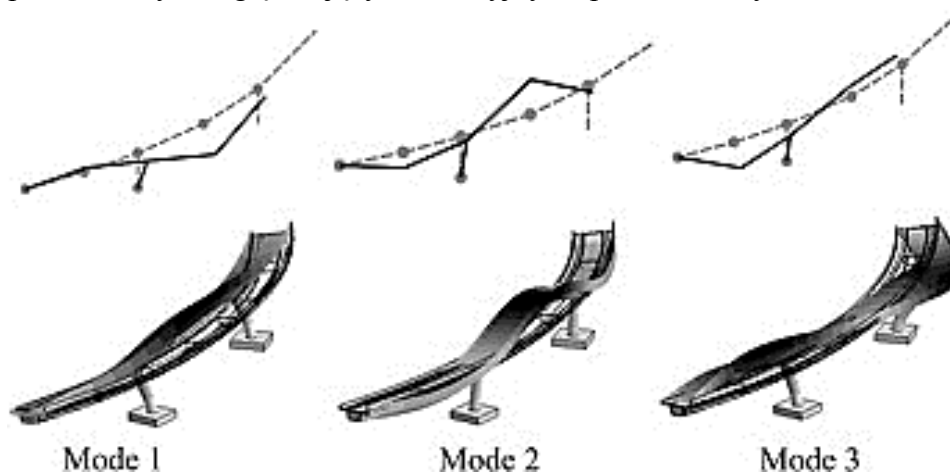


właściwości dynamiczne tych konstrukcji. Na Rys. 1.2 przedstawiono porównanie przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia wyznaczonych podczas badań pewnej belki zespolonej stalowo-betonowej. Linia niebieską ciąglą oznaczono charakterystykę uzyskaną na kierunku osi Z, dla punktu 1 zlokalizowanego w narożu belki zespolonej, w wyniku wymuszenia na tym samym kierunku w punkcie A. Linia czarną przerywaną oznaczono charakterystykę uzyskaną jak poprzednio na kierunku osi Z dla punktu 1, w wyniku wymuszenia na tym samym kierunku w punkcie B. Oznaczenie punktów i osi patrz Rys. 1.1.

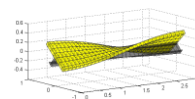


Rys. 1.2 Porównanie przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia na kierunku osi Z w punkcie 1, wymuszenie A i B na kierunku osi Z (opis w tekście)

Obydwa przebiegi są zarejestrowane jako odpowiedzi na tym samym kierunku i w tym samym punkcie. Analizując drugi przebieg częstotliwościowej funkcji przejścia bardzo wyraźnie widać wzbudzone zarówno giętne jak i skrętne formy drgań. Dla pierwszego przebiegu częstotliwościowej funkcji przyspieszeń uzyskano tylko giętne formy drgań. Aby móc analizować również skrętne formy drgań należy zdefiniować model przestrzenny uwzględniający translacyjny stopień swobody na kierunku osi Y.



Rys. 1.3 Przykładowe doświadczalne i obliczeniowe postaci drgań własnych mostu [20]



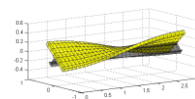
Modelowanie drgań przestrzennych ma szczególnie duże znaczenie podczas analizy mostów, których przęsła konstruuje się jako dwudźwigarowe zespolone z płytą żelbetową. W przypadku dwutorowych mostów kolejowych oddziaływania pochodzące od składu pociągu praktycznie zawsze oddziałują na obiekt w sposób niesymetryczny. Przęsło mostu jest zatem nie tylko zginane ale również skręcane. Ze skręcaniem przęsła mamy również do czynienia podczas analizy obiektów zakrzywionych w planie gdzie siły odśrodkowe pochodzące od szybko poruszającego się składu przyłożone są na mimośrodzie w stosunku do środka ciężkości przęsła generując moment skręcający przęsło. Na konieczność uwzględniania innych niż wyłącznie giętne form drgań zwracają uwagę autorzy prac [19, 20] podczas badań oraz symulacji dynamicznego zachowania się trójprzęsłowego obiektu mostowego (Rys. 1.3).

Praca doktorska poświęcona jest modelowaniu drgań przestrzennych stalowo-betonowych belek zespolonych. W pracy opisano przestrzenny model, który opracowano w konwencji metody sztywnych elementów skończonych (SES). Zastosowanie metody sztywnych elementów skończonych pozwala na efektywne wyznaczanie właściwości dynamicznych tego typu konstrukcji. Przedstawiono także badania doświadczalne charakterystyk dynamicznych. Badania doświadczalne przeprowadzono dla trzech belek zespolonych, płyty żelbetowej oraz kształtownika stalowego. Niniejsza praca prezentuje metodykę badań doświadczalnych oraz otrzymane wyniki. Przedstawiono również opracowany algorytm estymacji parametrów modeli belek zespolonych oraz płyty. Założono prowadzenie estymacji na podstawie wyników badań doświadczalnych z wykorzystaniem nie tylko częstotliwości drgań własnych, ale również wykorzystując określone w trakcie badań postacie drgań własnych oraz przebiegi częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń.

Ze względu na brak komercyjnego oprogramowania bazującego na metodzie sztywnych elementów skończonych, na potrzeby pracy opracowano własny program w środowisku programowania MATLAB.

1.2. Przegląd stanu zagadnienia

Jako jedni z pierwszych tematem analizy właściwości dynamicznych stalowo-betonowych belek zespolonych, zajęli się naukowcy Biscontin i in. [8]. Opracowali jednowymiarowy matematyczny model ciągły stalowo-betonowej belki zespolonej zgodnie z teorią belek Eulera, który umożliwiał rozwiązanie zagadnienia własnego. Przedstawiony model pozwalał na uwzględnienie podatności zespolenia. Model analityczny został wykorzystany w celu interpretacji wyników badań dynamicznych przeprowadzonych na rzeczywistych belkach. Wyniki eksperymentu okazały się tylko częściowo zgodne z wynikami obliczeń teoretycznych i pozwoliły na identyfikację niektórych parametrów fizycznych układu oraz charakterystyk połączenia.

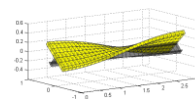


Kolejną pracą opartą o analizy przedstawione przez Biscontin i in. [8] był dwu częściowy artykuł [13, 31] naukowców Morassi i Rocchetto oraz Dilena i Morassi. Pierwsza część [31] dotyczyła badań doświadczalnych przeprowadzonych na czterech belkach zespolonych. Belki te były badane w stanie nieuszkodzonym, a następnie w uszkodzonym. W analizie porównywano otrzymane częstotliwości i postacie drgań własnych dla belek zespolonych przed i po uszkodzeniu. W drugiej części artykułu [14] przedstawiono model obliczeniowy pozwalający na analizę właściwości dynamicznych belek stalowo-betonowych z wprowadzonym uszkodzeniem zespolenia na końcach belek. Prezentowany model uwzględniał podatność zespolenia na obydwu kierunkach: równoległym i prostopadłym do osi belki. Estymacji parametrów modeli przeprowadzono jedynie na podstawie częstotliwości drgań własnych. Otrzymane częstotliwości drgań własnych na podstawie modelu znacznie odbiegały od tym otrzymanych w wyniku badań doświadczalnych.

W kolejnej pracy [13] naukowcy Dilena i Morassi przedstawili wyniki badań doświadczalnych przeprowadzonych na belkach zespolonych o schemacie belki swobodnej. Cztery belki, w tym dwie z zespoleniem pełnym i dwie z zespoleniem częściowym przebadano w stanie nieuszkodzonym oraz w czterech konfiguracjach uszkodzenia zespolenia. W trakcie badań określano częstotliwości drgań giętnych i osiowych wraz z odpowiadającymi im współczynnikami tłumienia modalnego oraz postaciami drgań. Autorzy wykazali, że przy dokładnych pomiarach belek zespolonych w stanie nieuszkodzonym i uszkodzonym można zaobserwować widoczne zmiany postaci drgań i częstotliwości drgań własnych. Wykazali, że postaci drgań własnych są mniej czułe na zmiany po wprowadzeniu uszkodzeń. Dowiedli, że znaczące zmiany są widoczne dla dużych uszkodzeń i wyższych postaci drgań.

Sapountzakis w pracy [45] przedstawił analizę dynamiczną belek zespolonych z zespoleniem podatnym. Zaproponowany model matematyczny uwzględniał sztywność zespolenia na ścinanie. Sztywność na drugim kierunku została pominięta. Model zdefiniowano zgodnie z teorią belek Eulera. Model ten uwzględniał przestrzenny charakter belki zespolonej, jednak autor brał pod uwagę jedynie wybrane stopnie swobody. W celu rozwiązania modelu, pomimo zdefiniowania ciągłych równań, konieczna była dyskretyzacja modelu. Zastosowano w tym celu metodę AEM (*ang. Analog Equation Method*) opracowaną przez autora. W opracowaniu tym wykazano, że definicja i rozwiązanie przestrzennego modelu ciągłego jest niezwykle trudne.

W pracy [6] Berczyński i Wróblewski zdefiniowali trzy różne ciągłe modele belek zespolonych. Definiowane modele były modelami płaskimi, dwuwymiarowymi. Najdokładniejszy z nich okazał się model bazujący na teorii belki Timoshenki, uwzględniał on wpływ sił ścinających na odkształcenia belki oraz wpływ sił bezwładności w ruchu obrotowym. Model ten pozwolił uzyskać bardzo wysoką zgodność częstotliwości drgań własnych otrzymanych na podstawie rozwiązania teoretycznego do tych uzyskanych z badań doświadczalnych.



Problemem w przedstawionych modelach ciągłych było zastępowanie dyskretnie rozmieszczonych elementów zespalających na ciągle zespolenie o stałych parametrach. Dodatkowo rozwiązanie modelu Timoshenki oraz modelu opartego na teorii belki Euler odbywało się na drodze iteracyjnej co wydłużało znacznie czas obliczeń.

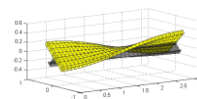
W innym artykule [46] Sapountzakis i Mocos przedstawili połączenie pomiędzy belką i płytą, które zostało zamodelowane za pomocą dwóch powierzchni przylegania. Dzięki takiemu podejściu w modelu analitycznym z zastosowaniem własnej metody dyskretyzacji, uwzględniona została sztywność połączenia w kierunku poziomym oraz prostopadłym do osi belki, a także model ten uwzględniał przestrzenny charakter belki zespolonej. Takie zmiany umożliwiły autorom rozpatrywania stopni swobody na innych kierunkach.

W kolejnej opracowaniu [15] Dilela i Morassi rozpatrywali modelowanie i estymację parametrów belek zespolonych z częściowo uszkodzonym połączeniem na końcu belki. Autorzy opracowali dwa modele jeden został oparty na teorii belki Euler, a drugi na teorii Timoshenko. Uzyskano potwierdzenia występowania uszkodzenia na podstawie analizy postaci drgań.

Autorzy Berczyński i Wróblewski w kolejnej pracy [7], przedstawili koncepcję modelu płaskiego, dyskretnego w konwencji metody sztywnych elementów skończonych i wyniki doświadczalnych badań dynamicznych przeprowadzonych na trzech stalowo-betonowych belkach zespolonych. Belki różniły się między sobą sztywnością zespolenia. Głównym celem badań było ustalenie podstawowych charakterystyk dynamicznych belek. Uzyskane wyniki pozwoliły na weryfikację dwóch modeli teoretycznych: ciągłego opracowany z uwzględnieniem teorii belki Timoshenki oraz dyskretnego opracowanego w konwencji metody sztywnych elementów skończonych. Autorzy wykazali, że metoda sztywnych elementów skończonych może być efektywnym narzędziem modelowania belki stalowo-betonowej. Parametry obydwu modeli ustalano na drodze identyfikacji, starając się uzyskać jak najwyższą zgodność wyników analiz numerycznych z wynikami doświadczalnymi. W pracach tych również estymowano parametry modelu jedynie na podstawie porównania częstotliwości drgań własnych. W wyniku przeprowadzonych analiz uzyskano bardzo wysoką zgodność częstotliwości drgań własnych określanych doświadczalnie i na podstawie modeli.

Podsumowując problem analizy dynamicznej belek zespolonych z zespoleniem podatnym jest bardzo skomplikowanym zagadnieniem. Ilość prac poświęconych sposobom modelowania pokazuje, że temat wciąż jest poddawany analizie i modele są wciąż ulepszone.

Wśród różnych metod modelowania często wykorzystywana jest metoda sztywnych elementów skończonych. Głównym twórcą metody sztywnych elementów skończonych był Profesor Kruszewski z Politechniki Gdańskiej [22, 23, 52] początkowo służyła ona przede wszystkim dla potrzeb przemysłu okrętowego. W późniejszym rozwoju metoda SES znalazła zastosowanie do modelowania różnorodnych konstrukcji inżynierskich. Od wielu lat stosowano ją do modelowania drgań obrabiarek [29], robotów przemysłowych, konstrukcji typu offshore [53] i płyt zbiorczych elektrofiltrów [3, 35].



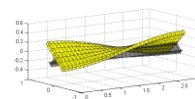
W modelach obliczeniowych można także stosować zarówno sztywne i odkształcalne elementy skończone, czyli stosowanie zarówno metody SES jak i MES w ten sposób powstała metoda hybrydowa w znaczny sposób rozwijana przez ośrodek w Bielsku-Białej przez Wojciecha i Adamiec-Wójcik [2, 36, 52].

Ważnym zagadnieniem w analizie konstrukcji jest detekcja uszkodzeń. Zagadnieniem detekcji uszkodzeń na podstawie zmian charakterystyk dynamicznych zajmowali się od lat De Roeck i in. [28]. Metody iteracyjne, które są prezentowane przez autorów pozwalają na porównywanie mierzonych parametrów modalnych (częstotliwości i postaci drgań) z obliczonymi na podstawie modelu [48]. Metody stosowane przez autorów do wykrywania uszkodzeń (na podstawie badań dynamicznych) pozwalają wykryć zmiany w konstrukcji, ale nie umożliwiają wskazania miejsca uszkodzenia. Autorzy przeprowadzili estymację parametrów na podstawie częstotliwości i postaci drgań. Badania wykonywano najpierw dla konstrukcji nieuszkodzonej, a następnie uszkodzanej w kilku krokach i analizowano wrażliwość każdego kryterium po uszkodzeniu. Prace te dotyczą tylko belek żelbetowych oraz płyt sprężonych [27].

Mordini i Wenzel z Vienna Consulting Engineers zajmują się wykrywaniem uszkodzeń poprzez bezinwazyjne badania dynamiczne, z zastosowaniem SHM (*ang. Structural Health Monitoring*), które pozwala na wykrycie uszkodzeń wewnątrz belki. W procesie estymacji oceniali zgodność częstotliwości i postaci drgań. W publikacjach [32, 33] przedstawili możliwość zastosowania MAC (*ang. Modal Assurance Criterium*) do porównania postaci drgań giętnych. Autorzy stworzyli oprogramowanie mające na celu wykrywanie uszkodzeń w konstrukcjach mostowych na podstawie analizy modalnej. Jako kryterium estymacji parametrów przyjęli dopasowanie postaci drgań giętnych i częstotliwości drgań własnych. Zastosowany parametr MAC został opisany przez Allemang i Brown [4, 18].

Zagadnieniem wykrywania uszkodzeń belek stalowo-betonowych zajmowali się również Wróblewski, Berczyński i Jarosińska. Pierwsza z prac [55] zawiera porównanie zmian charakterystyk dynamicznych takich jak: częstotliwości drgań własnych, tłumienie modalne oraz współczynnik transferu energii (ETR - *ang. Energy Transfer Ratio*) ze względu na zmianę wielkości uszkodzenia. W pracy tej wykazano, że najbardziej wrażliwy na uszkodzenie jest współczynnik ETR, dlatego też w dalszych pracach autorzy postanowili użyć go do diagnostyki uszkodzeniach w tego typach konstrukcji. W pracy [56] przedstawiono sposoby lokalizacji uszkodzeń z wykorzystaniem współczynnika ETR. Analiz dokonywano na modelach zbudowanych z wykorzystaniem metody sztywnych elementów skończonych. Do modelu wprowadzano uszkodzenia, które następnie lokalizowano za pomocą współczynnika transferu energii ETR.

Z przeprowadzonej analizy stanu zagadnienia wynika, że do tej pory nie było prac dotyczących modelowania drgań przestrzennych (giętnych poziomych, skrętnych oraz drgań elementów składowych w poprzek). Są to takie formy drgań w których składowe postaci drgań występują również na kierunku poziomym prostopadłym do osi belki. Elementy belki zespolonej, kształtownik stalowy i płyta żelbetowa, drgają także w poprzek na kierunku osi Y (patrz Rys. 1.1). Stąd też celowym jest opracowanie modelu



odzwierciedlającego te właściwości. Ponieważ brak jest w literaturze danych dotyczących parametrów określających sztywność zespolenia i tłumienia w tym połączeniu, koniecznym była także estymacja tych parametrów zespolenia na podstawie wyników badań doświadczalnych, częstotliwości i postaci drgań oraz częstotliwościowych funkcji przejścia.

1.3. Teza, cel i zakres pracy

Pełna ocena właściwości dynamicznych belek zespolonych wymaga opracowania modelu przestrzennego drgań. Pozwoli on analizować sprzężenia drgań na różnych kierunkach przy działaniu wymuszeń w dowolnym miejscu konstrukcji. Model taki może być efektywnym narzędziem do oceny właściwości dynamicznych i detekcji uszkodzeń belek.

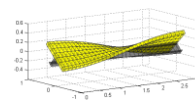
Postawiono następujące tezy:

1. Metoda sztywnych elementów skończonych przy odpowiednim zamodelowaniu połączenia belki stalowej z płytą żelbetową może być efektywnym narzędziem do modelowania tego typu konstrukcji i oceny ich właściwości dynamicznych.
2. Wykorzystanie gradientowych metod minimalizacji pozwala na efektywne wyznaczanie estymat identyfikowanych parametrów modelu belki stalowo-betonowej.
3. Estymacja parametrów modeli może być efektywnym narzędziem do określenia wielkości uszkodzenia.

Celem pracy było opracowanie modelu przestrzennego konstrukcji zespolonych belka-płyta żelbetowa oraz metody estymacji parametrów modelu to znaczy współczynników sztywności i tłumienia na podstawie częstotliwości, postaci drgań oraz częstotliwościowych funkcji przejścia. Założono, że estymowane będą następujące parametry modeli: zastępczy dynamiczny moduł sprężystości podłużnej betonu, sztywność połączenia kształtownika stalowego z płytą żelbetową oraz współczynniki tłumienia stali, zespolenia oraz betonu dla badanych belek zespolonych.

Zakres pracy obejmuje:

1. Przeprowadzenie badań doświadczalnych belek zespolonych stalowo-betonowych.
2. Opracowanie modelu drgań przestrzennych belek zespolonych przy zastosowaniu metody sztywnych elementów skończonych.
3. Opracowanie algorytmu estymacji parametrów modelu belek zespolonych na podstawie charakterystyk dynamicznych uzyskanych podczas badań.



4. Estymację parametrów modelu: zastępczego dynamicznego modułu sprężystości podłużnej betonu, sztywności elementów zespalających oraz współczynników tłumienia stali, betonu oraz zespolenia dla badanych belek na podstawie wyników badań doświadczalnych.
5. Obliczenia symulacyjne detekcji uszkodzeń belki zespolonej z wykorzystaniem algorytmu estymacji parametrów.

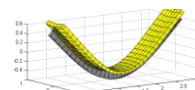
Prezentowana kolejność powstawania pracy, została wymuszona przez iteracyjny proces budowy modelu. Model ten powstawał na podstawie badań i możliwości odwzorowania zarówno odpowiednich częstotliwości i postaci drgań własnych giętnych, skrętnych i osiowych. Starano się osiągnąć zgodność strukturalną modelu stworzonego w konwencji metody sztywnych elementów skończonych z badaną belką zespoloną.

2. Badania doświadczalne charakterystyk dynamicznych

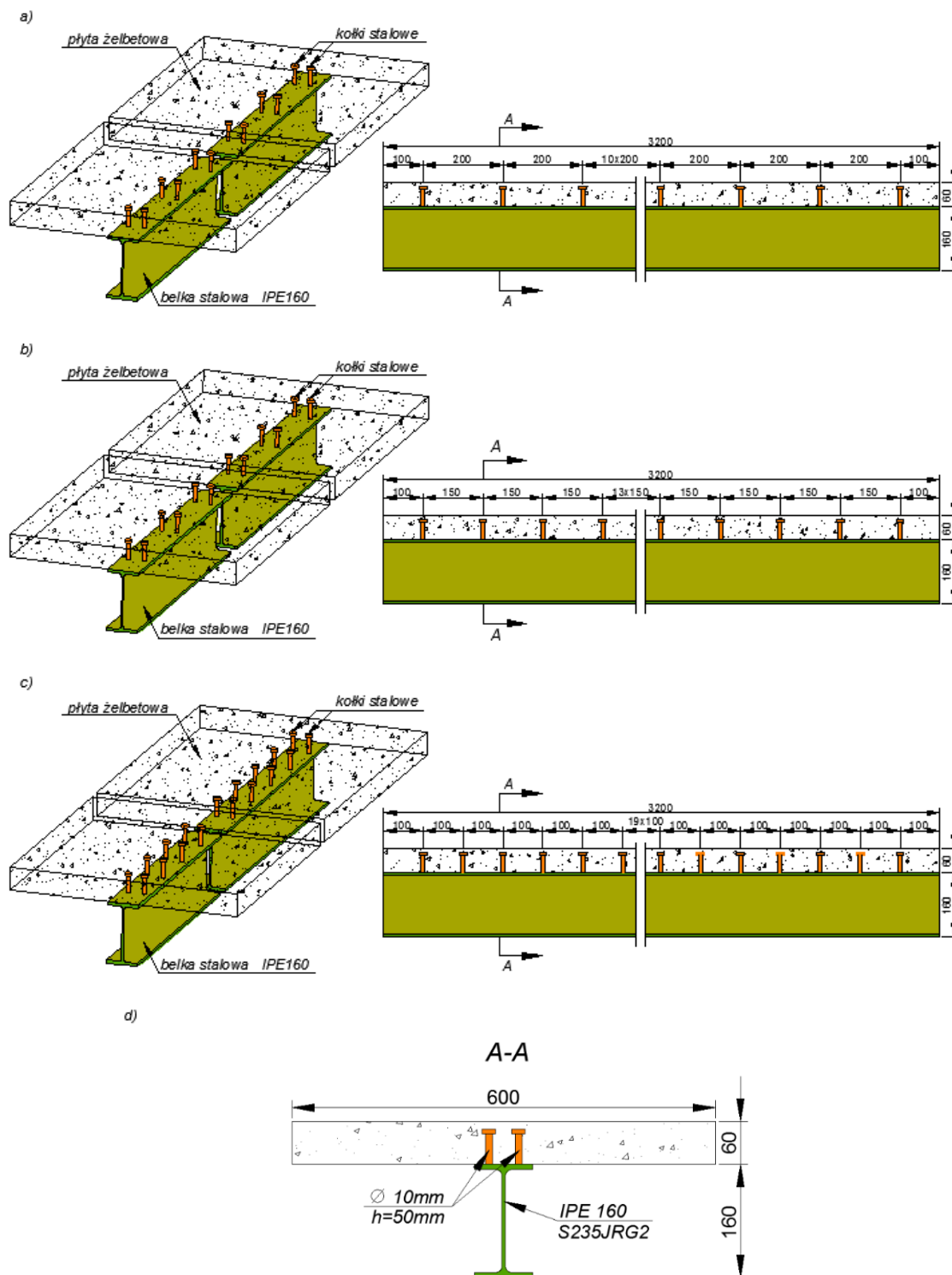
Badania doświadczalne charakterystyk dynamicznych obejmowały wyznaczenie częstotliwości drgań własnych, postaci drgań oraz charakterystyk częstotliwościowych przyspieszeń trzech stalowo-betonowych belek zespolonych z zespoleniem w postaci stalowych kołków oraz osobno płyty żelbetowej i kształtownika stalowego. Przed wykonaniem badań właściwości dynamicznych przeprowadzono testy kondycjonujące, które miały na celu potwierdzenie poprawności wykonania belek zespolonych. Badanie to wykonywano przyjmując schemat belki wolnopodpartej o rozpiętości 3,0 m i obciążonej dwiema siłami skupionymi rozsuniętymi na odległość 1m. Badania te przeprowadzono w zakresie sprężystym. Stosowane obciążenie statyczne nie przekraczało 40% nośności belki. Przeprowadzone testy dostarczyły poprawne wyniki i potwierdziły prawidłowe zachowywanie się belek.

2.1. Obiekt badań

Badaniu poddano belki zespolone składającą się z dwuteownika walcowanego IPE 160 wykonanego ze stali S235JRG2, zespolonego z płytą żelbetową o przekroju 60x600 mm. Mieszanke betonową do wykonania płyty zamówiono w lokalnej wytwórni betonu. Wykonano ją na bazie cementu klasy 42,5 z dodatkiem plastyfikatora BV. Stosunek W/C 0,64, konsystencja S3, planowana klasa wytrzymałości C25/30. Maksymalny rozmiar stosowanego kruszywa łamanego został ograniczony do 8 mm ze względu na niewielkie wymiary wykonywanych elementów. W omawianej płycie zastosowano zbrojenie z prętów żebrowanych o średnicy 6 mm, wykonanych ze stali kategorii A-I. Zbrojenie podłużne rozłożono w rozstawie co 75 mm, a zbrojenie poprzeczne co 150 mm. Zastosowano siatki zbrojeniowe górą i dołem. Zespolenie elementów płyty żelbetowej z kształtownikiem stalowym wykonano za pomocą kołków stalowych (nazywanymi też sworzniami). Zastosowano zespolenie wiotkie w postaci stalowych kołków zespalających z łbem firmy KÖCO – typ SD o średnicy 10 mm i wysokości 50 mm, wykonanych ze stali S235J2G3.

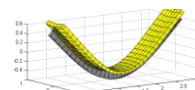


Kołki rozmieszczono w różnym rozstawie, dla belki C1 co 200 mm, dla belki C2 co 150 mm i dla belki C3 co 100 mm. Długość całkowita belki wyniosła 3200 mm. Schematy belek przedstawiono na (Rys. 2.1).



Rys. 2.1 Badane belki stalowo-betonowe: a) belka C1; b) belka C2; c) belka C3; d) przekrój poprzeczny A-A

Charakterystyki geometryczne belek zespolonych ustalono na podstawie pomierzonych wartości: grubości płyty i ciężaru belki zespolonej. Pomiaru grubości



dokonano w odległości 100 mm od początku płyty żelbetowej i dalej co 500 mm, w ten sposób uzyskano dla belek zespolonych 7 punktów pomiarowych. Obmiaru dokonano za pomocą suwmiarki elektronicznej o rozdzielczości pomiarowej 0,01 mm. Pomiaru dokonano zarówno po lewej (L) jak i prawej (P) stronie elementu. Wszystkie pomierzone dane zestawiono w tabeli 2.1 oraz w tabeli 2.2.

Tabela 2.1 Wyniki pomiaru grubości płyty żelbetowej dla belek zespolonych

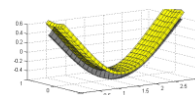
nazwa belki	C1		C2		C3	
grubość [mm]	L	P	L	P	L	P
A - 0	63,94	63,12	62,15	60,61	62,79	60,46
500	60,37	61,08	61,34	60,57	60,99	61,64
1000	61,01	60,76	61,48	62,10	61,37	60,94
1500	60,44	61,11	61,69	62,11	64,15	64,51
2000	61,02	60,46	60,48	61,41	62,11	60,10
2500	60,42	61,24	61,45	61,38	60,85	60,57
B - 3000	60,54	62,64	61,69	61,14	61,82	61,52
wartość średnia	61,30		61,40		61,70	
odchylenie standardowe	1,12		0,55		1,32	
95% przedział ufności	0,59		0,29		0,69	

Tabela 2.2 Wyniki pomiaru masy belki zespolonej

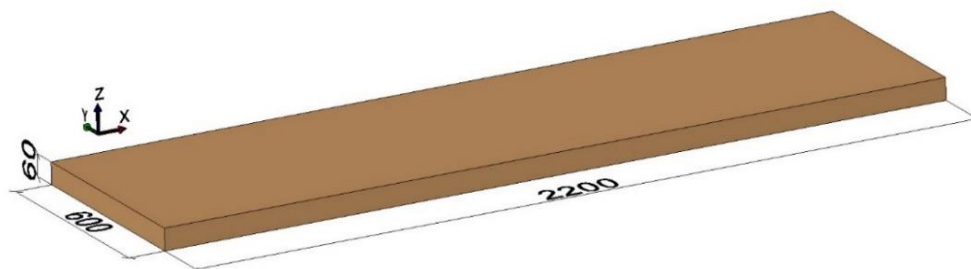
nazwa belki	C1	C2	C3
[kg]	323,9	322,9	326,6
	323,8	322,6	327,2
	323,6	322,7	326,9
wartość średnia [kg]	323,8	322,8	326,9

Podczas prowadzenia badań doświadczalnych postanowiono zbadać dodatkowo komponenty belki stalowo-betonowej. Przeprowadzono dodatkowe badania pojedynczych elementów takich jak płyta żelbetowa oraz kształtownik stalowy. Stalowa belka to kształtownik IPE 160 o długości 3240 mm ze stali gatunku S235. Badana płyta żelbetowa to płyta o wymiarach: grubość 60 mm, szerokość 600 mm i długość 2200 mm, wykonano z betonu o klasie C25/30 (Rys. 2.2.a). Badana płyta żelbetowa była krótsza od tej, która wchodziła w skład belki zespolonej. Zbrojenie wykonano jak dla płyty żelbetowej, belki zespolonej (Rys. 2.2.b).

Charakterystyki geometryczne płyty żelbetowej ustalono na podstawie pomierzonych wartości: grubości płyty i ciężaru. Pomiaru grubości dokonano w odległości 100 mm od początku płyty żelbetowej i dalej co 500 mm, w ten sposób uzyskano dla płyty żelbetowej 5 punktów pomiarowych. Do obliczeń przyjmowano uśrednioną wartość grubości płyty zestawioną w tabeli 2.3. Podczas badań zważono również kształtownik stalowy IPE 160, a jego masa wynosiła 49,9 kg.



a)



b)



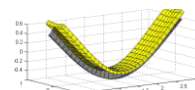
Rys. 2.2 Badana płyta: a) geometria (mm); b) zastosowane zbrojenie

Tabela 2.3 Wyniki pomiaru grubości i masy płyty żelbetowej

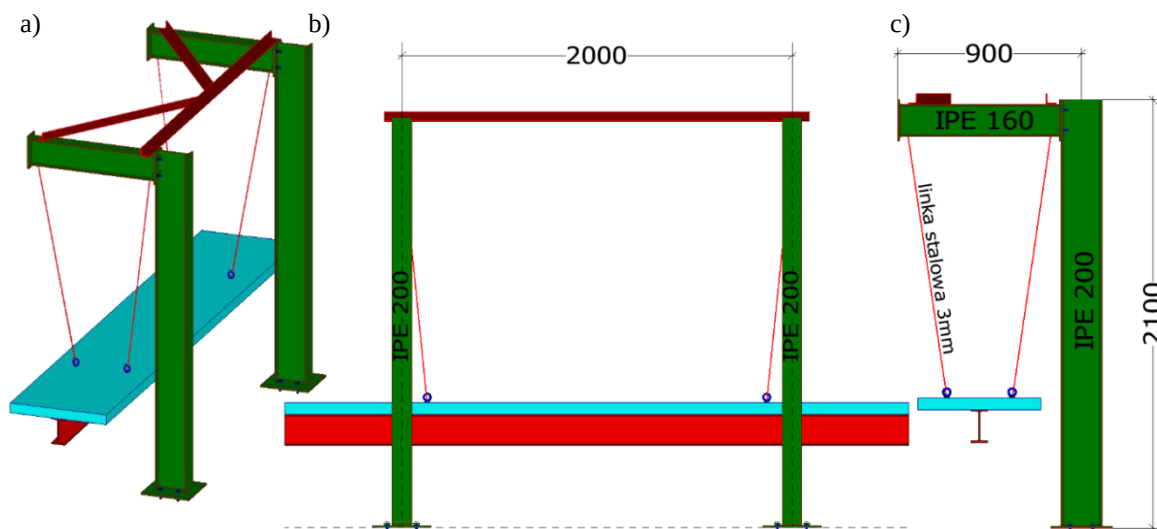
nazwa	PŁYTA	
masa [kg]	189,3	
grubość [mm]	L	P
A - 0	60,8	61,06
500	60,76	60,13
1000	60,26	60,27
1500	60,48	60,90
B - 2000	61,53	60,74
wartość średnia	60,69	
odchylenie standardowe	0,42	
95% przedział ufności	0,22	

2.2. Stanowisko badawcze i metodyka badań

Badania dynamiczne belek zespolonych, płyty oraz dwuteownika stalowego przeprowadzane dla schematu belki lub płyty swobodnej. Stanowisko doświadczalne składało się z dwóch słupów stalowych ze wspornikowymi ryglami w rozstawie osiowym słupów wynoszącym 2,0 m. Wsporniki zostały stężone za pomocą kątowników. W trakcie badań dynamicznych do wsporników podwieszono belkę za pomocą czterech lin stalowych o średnicy 3 mm i w ten sposób zrealizowano schemat belki lub płyty swobodnej. Schemat taki pozwala na pominięcie wpływu podatności podpór na uzyskiwane wyniki. Podatność lin dobrano tak aby częstotliwość drgań wynikająca



z ruchu bryły sztywnej w przestrzeni znajdowały się poniżej zakresu, w którym znajdują się częstotliwości drgań własnych badanej belki lub płyty. Punkty zamocowania lin do płyty, belki czy dwuteownika stalowego były dobierane tak aby pokrywały się z teoretycznymi węzłami podstawowych postaci giętnych drgań własnych elementów. Schemat stanowiska podczas badań doświadczalnych wraz z belką zespoloną przedstawiono na rysunku (Rys. 2.3).



Rys. 2.3 Stanowisko badań: a) perspektywa; b) widok z boku; c) widok od czoła

2.3. Podstawy eksperymentalnej analizy modalnej

Eksperymentalna analiza modalna jest najpowszechniejszą techniką identyfikacji parametrów modalnych konstrukcji mechanicznych. W metodach klasycznych do estymacji parametrów modalnych wykorzystuje się pomiar wymuszenia i odpowiedzi. Zasadniczy podział tych metod to podział na metody w dziedzinie czasu i częstotliwości [50]. Eksperymentalna analiza modalna składa się z czterech etapów: modelowanie, eksperyment, estymacja parametrów i weryfikacja modelu.

Układ równań różniczkowych opisujących ruch drgający modelu z uwzględnieniem tłumienia przyjmuje postać:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.1)$$

gdzie:

$\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$, $\ddot{\mathbf{q}}$ – wektory przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia masy,

$\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$ – macierze bezwładności, tłumienia oraz sztywności,

$\mathbf{F}$ – wektor sił uogólnionych.

Zakładając warunki początkowe zerowe i stosując do obu stron równania (2.1) transformację Laplace'a otrzymano:

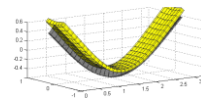
$$(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})\mathbf{Q}(s) = \mathbf{F}(s) \quad (2.2)$$

gdzie:

s – zmienna zespolona, $s = j\omega$,

$\mathbf{Q}(s)$ – transformacja Laplace'a odpowiedzi układu,

$\mathbf{F}(s)$ – transformacja Laplace'a wymuszenia.



Równanie (2.2) można zapisać w uproszczeniu jako:

$$\mathbf{Z}(s)\mathbf{Q}(s) = \mathbf{F}(s) \quad (2.3)$$

gdzie:

$\mathbf{Z}(s)$ – macierz sztywności dynamicznej.

Podstawiając w równaniu (2.3) przez odwrócenie macierzy sztywności dynamicznej, wartość alternatywną (2.4) zwaną podatnością

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{Z}(s)^{-1} = \frac{\mathbf{Z}_{ad}(s)}{|\mathbf{Z}(s)|} \quad (2.4)$$

otrzymujemy równanie:

$$\mathbf{H}(s)\mathbf{F}(s) = \mathbf{Q}(s) \quad (2.5)$$

gdzie:

$\mathbf{H}(s)$ – macierz podatności dynamicznej,

$\mathbf{Z}_{ad}(s)$ – jest to macierz dołączona do macierzy $\mathbf{Z}(s)$.

Analizę modalną można stosować po spełnieniu pewnych założeń. Po pierwsze układ musi być liniowy i jego dynamika musi być opisana za pomocą liniowego układu równań różniczkowych zwyczajnych lub cząstkowych (2.6).

$$\mathbf{H}(s) = \text{const}(s) \quad (2.6)$$

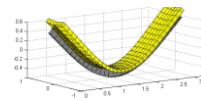
Współczynniki równań opisujących dynamikę muszą być stałe w czasie pomiarów (2.7).

$$\mathbf{H}(s, t) = \text{const}(s) \quad (2.7)$$

Obiekt jest dostępny i istnieje możliwość pomiaru wszystkich charakterystyk, których znajomość jest potrzebna do identyfikacji modelu. Układ spełnia zasadę wzajemności Maxwella (2.8).

$$H_{ij}(s) = H_{ji}(s) \quad (2.8)$$

Macierz $\mathbf{H}(s)$ jest macierzą kwadratową ($n \times n$) dla układów o n stopniach swobody. Element tej macierzy możemy interpretować jako funkcję przejścia między punktem, w którym przyłożone jest wymuszenie, a punktem, w którym mierzona jest odpowiedź. Funkcja przejścia nazywa się charakterystyką punktową, jeżeli pomiar odpowiedzi i wymuszenie są mierzone w tym samym punkcie. Natomiast jeżeli pomiar odpowiedzi jest w innym punkcie niż wymuszenie to nazywamy tę funkcję charakterystyką przejścia. Pierwiastki równania charakterystycznego (2.5) są biegunami układu i opisują częstotliwości własne układu oraz współczynniki tłumienia dla tych częstotliwości. Wielkości te są otrzymywane poprzez rozwiązanie zagadnienia własnego. Aby rozwiązać zagadnienie własne równania (2.5) należy je przetransformować z problemu n -wymiarowego drugiego rzędu do problemu $2n$ -wymiarowego pierwszego rzędu. Rozwiązanie tego problemu własnego do wyznaczenia $2n$ zespolonych wartości własnych. Wartości te są podane w postaci sprzężonych par pierwiastków, które są biegunami układu. Części rzeczywiste biegunów (ζ) są współczynnikami tłumienia, a część urojona (ω) są częstotliwościami własnymi tłumionymi układu. Wektory własne są nazywane postaciami drgań, wektorami modalnymi lub wektorami przemieszczeń modalnych (ψ). Wektory modalne w ogólnym przypadku współrzędne są zespolone, których każda składowa ma



fazę i amplitudę. Wartości własne są jednocześnie pierwiastkami równania charakterystycznego, tak więc równanie (2.4) przyjmuje postać:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{Z}_{ad}(s)}{\prod_{r=1}^n D_1(s - \lambda_r)(s - \lambda_r^*)} = \sum_{r=1}^n \left(\frac{\mathbf{A}_r}{s - \lambda_r} + \frac{\mathbf{A}_r^*}{s - \lambda_r^*} \right) \quad (2.9)$$

gdzie:

λ_r, λ_r^* – wartości własne,

D_1 – stała,

$\mathbf{A}_r, \mathbf{A}_r^*$ – reszty modalne.

Podstawiając w równaniu (2.9) $s = j\omega$, otrzymujemy zależność wyrażającą przebieg macierzy charakterystyk częstotliwościowych układu:

$$\mathbf{H}(j\omega) = \sum_{r=1}^n \left(\frac{\mathbf{A}_r}{j\omega - \lambda_r} + \frac{\mathbf{A}_r^*}{j\omega - \lambda_r^*} \right) \quad (2.10)$$

Podsumowując charakterystykę częstotliwościową układu o wielu stopniach swobody można traktować jako sumę charakterystyk o jednym stopniu swobody [9].

2.4. Metodyka badań doświadczalnych

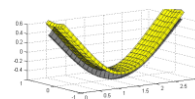
Przeprowadzone badania miały na celu wyznaczenie podstawowych charakterystyk dynamicznych: częstotliwości drgań własnych, tłumienia i częstotliwościowych funkcji przejścia. Ponieważ spodziewano się wyników w zakresie wysokich częstotliwości zdecydowano się na pomiar przyspieszeń drgań. Mając do wyboru różne sposoby wymuszania ruchu obiektu zdecydowano się na test impulsowy. Wymuszenie to polegało na zastosowaniu młotka modalnego jako elementu pobudzającego obiekt do drgań. Jako odpowiedź układów na wymuszenie mierzono przyspieszenia drgań. Odpowiedź rejestrowano za pomocą trójosiowych piezoelektrycznych przetworników przyspieszeń **PCB 356A01**. Czujniki te mocowano za pomocą specjalnego wosku dostarczonego przez producenta. Na powierzchni płyty żelbetowej mocowano je na stalowych okrągłych podkładkach o średnicy 25 mm (Rys. 2.4.a). Przyklejono je za pomocą modyfikowanej żywicy epoksydowej. Badania prowadzono stosując 9 takich samych czujników.

a)

b)



Rys. 2.4 Aparatura pomiarowa: a) trójosiowy czujnik przyspieszeń; b) młotek modalny

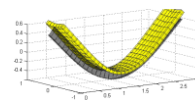


Badanie impulsowe przeprowadzano stosując wymuszenie w kilku wybranych punktach konstrukcji, a pomiar odpowiedzi układu w wielu punktach pomiarowych. Podczas prowadzonych badań zaplanowano 27 punktów pomiarowych dla płyty, 36 punktów pomiarowych dla belki zespolonej i 18 punktów pomiarowych dla dwuteownika stalowego. Taka ilość punktów wymagała prowadzenia badań etapowo przekładając kolejno czujniki między punktami pomiarowymi rejestracji przyspieszeń. Wymuszenia dokonywano za pomocą młotka modalnego KISLER 9726A20000 o masie własnej 500g (Rys. 2.4.b). W młotku tym zastosowano stalową końcówkę pokrytą polioksymetylenem – KISLER 9904A, która umożliwia skuteczne wzbudzenie postaci drgań o częstotliwościach do 600 Hz.

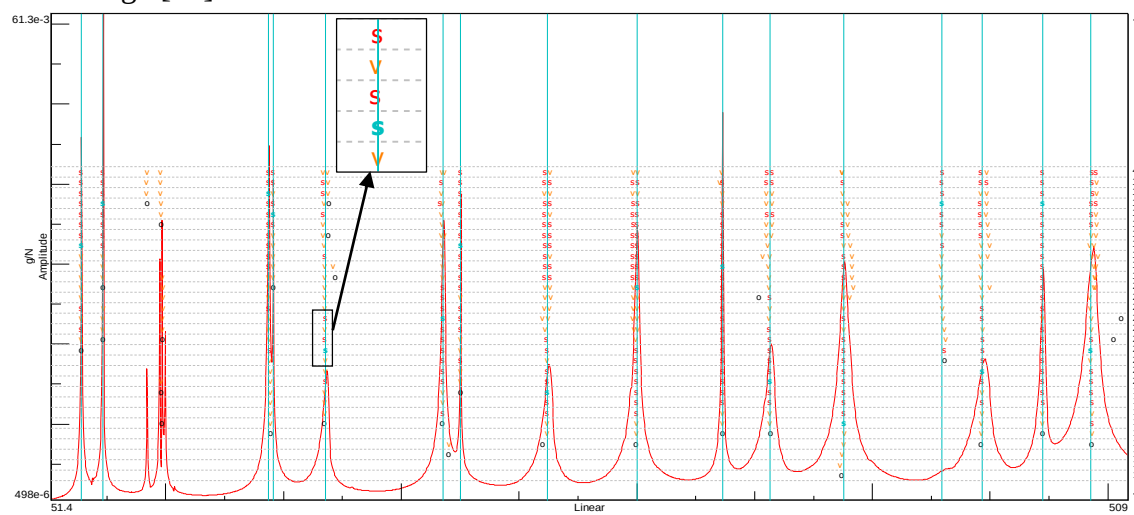
Każdy czujnik dawał możliwość rejestracji przyspieszenia na kierunku X, Y i Z. Przy posiadanych 9 czujnikach jednorazowo przy wymuszeniu rejestrowano 27 sygnałów odpowiedzi, oraz jeden sygnał wymuszenia. Sygnały rejestrowano używając analizatora pomiarowego LMS SCADAS III połączonego ze stacją roboczą wyposażonego w system komputerowy wspomaganie komputerowego badań, pakiet oprogramowania *Test.Lab*, produkt firmy LMS. W czasie prowadzenia testu impulsowego wykorzystywano moduł *Impact Testing* tego pakietu. W programie dokonano wszystkich ustawień parametrów pomiaru sygnałów.

Procedura przeprowadzania badań doświadczalnych dla płyty, dwuteownika stalowego i belek zespolonych była taka sama. W pierwszym etapie należało zdefiniować punkty pomiaru sygnałów. W drugim etapie określono parametry trójosiowych piezoelektrycznych czujników oraz młotka modalnego. Dane wpisywano ręcznie, zgodnie z informacjami zawartymi na kartach certyfikujących. Definiowano takie dane jak tryb pracy czujnika, numer seryjny oraz dane kalibracyjne. Trzecim etapem było ustawianie wzmocnień w taki sposób aby podczas mierzenia sygnału, wypełniane były całe pasma przetworników. Stosowane oprogramowanie umożliwiało jednorazowo ustawianie wartości wzmocnień dla wszystkich aktywnych kanałów pomiarowych. W następnym kroku definiowano parametry testu impulsowego. W ich skład między innymi wchodziło ustalenie poziomu sygnału wyzwalającego pomiar, czyli wyznaczenie wartości powyżej której siła wyzwała pomiar, ustalenie czasu startu pomiaru, co umożliwia wykorzystanie całości energii zawartej w impulsie oraz ustalenie zakresu częstotliwości. W ostatnim etapie testu impulsowego dokonano pomiaru. W przypadku przeprowadzonych badań każdy pomiar polegał na wykonaniu dwunastu powtórzeń wymuszenia w jednym z ustalonych miejsc wymuszeń. Przyspieszenia rejestrowano w dziewięciu punktach pomiarowych. Proces uśredniania przebiegał automatycznie według algorytmu zaimplementowanego w module *Impact Testing*.

W wyniku przeprowadzonych badań otrzymano przebiegi częstotliwościowych funkcji przejścia FRF (*ang. Frequency Response Function*) wyznaczanych, jako odpowiednie stosunki przyspieszeń drgań do siły. Funkcję FRF posłużyły do wyznaczenia tzw. modelu modalnego z użyciem modułu *Modal Analisis* systemu *Test.Lab* [21]. Do estymacji parametrów modalnych wykorzystano algorytm *PolyMAX*, który cechuje się wysoką efektywnością [39]. Metoda ta oparta jest



na częstotliwościowych funkcjach przejścia. Diagram stabilizacyjny przedstawia proces stabilizacji modelu modalnego. Stabilizacja ta polega na ustaleniu wartości parametru modalnego w ramach przyjętej tolerancji. W każdym kroku iteracji wzrasta rząd modelu, co powoduje łatwiejsze poszukiwanie estymowanych parametrów modelu modalnego [17].



Rys. 2.5 Diagram stabilizacyjny – belka C1, wymuszenie 1-Z

Na Rys. 2.5 przedstawiono diagram stabilizacyjny dla belki C1 dla wymuszenia 1- Z (wymuszenie w punkcie 1 na kierunku Z – opis w Rozdziale 2.5) z zaznaczonymi biegunami o stabilizacji typu „s”. Litera „s” oznacza stabilizację wszystkich parametrów modalnych. W ten sposób doprowadzono do zbudowania modelu modalnego, będącego zbiorem częstotliwości, odpowiadających im tłumień modalnych oraz wektorów postaci drgań. Walidację poprawności zbudowanego modelu modalnego przeprowadzono na podstawie wskaźnika *MAC* (*ang. Modal Assurance Criterion*), który jest skalarą, wyrażającym zależność pomiędzy zidentyfikowanymi postaciami [11]. Jego wartość została wyznaczone zgodnie z zależnością (2.11):

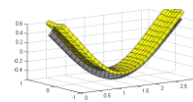
$$MAC_{rs} = \frac{|\psi_r^T \psi_s|^2}{\psi_r^T \psi_r^* \psi_s^T \psi_s} \quad (2.11)$$

gdzie:

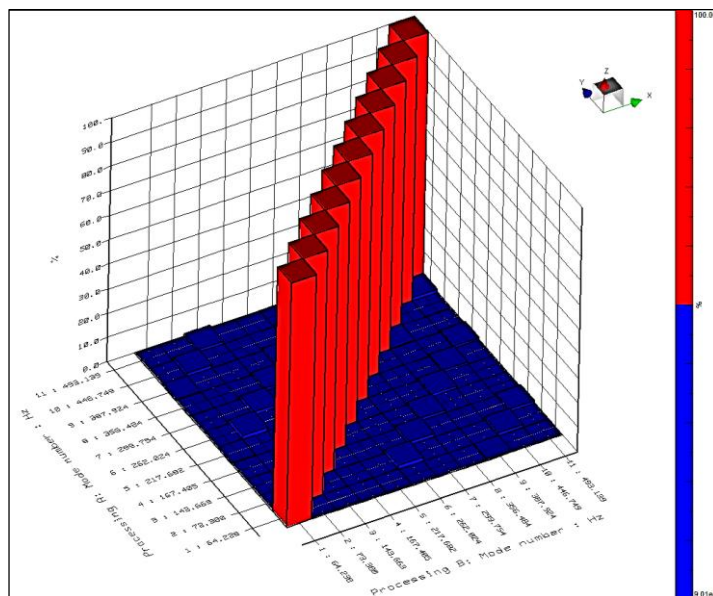
ψ_r , ψ_s – wektory modalne $\mathbf{r}$ i $\mathbf{s}$ (postacie drgań).

Wskaźnik ten przyjmuje wartość od zera, (oznaczającą brak zgodności) do jedności (wyrażającą pełne dopasowanie). Jeżeli współczynnik *MAC* dla dwóch wektorów modalnych $\mathbf{r}$ i $\mathbf{s}$ przyjmuje wartość równą jeden oznacza to, że wektory te są estymatorami tej samej fizycznej postaci drgań. Jeżeli wektory modalne są estymatorami dwóch różnych postaci, współczynnik ten powinien przyjmować wartość bliską zeru. Wynika to z warunków ortogonalności postaci drgań.

Dla analizowanej belki C1 zbudowano model modalny i sprawdzono go wykonując walidację z zastosowaniem wskaźnika *MAC*. Jego wynik przedstawiono za pomocą diagramu słupkowego na Rys. 2.6. Na przedstawionym rysunku można zaobserwować wysokie wartości wskaźnika *MAC* na diagonalu świadczące o poprawnym wyborze

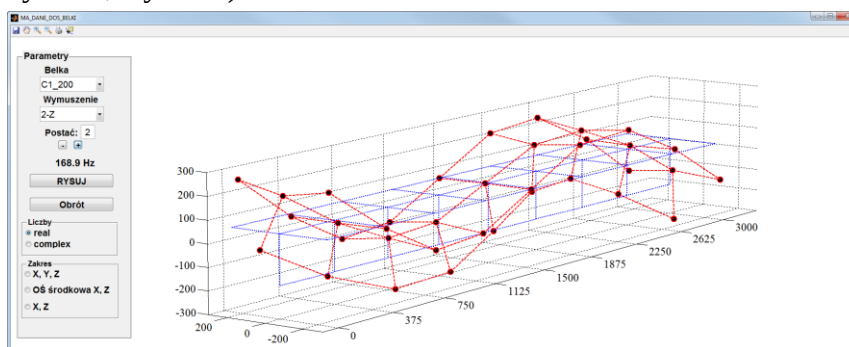


stabilizujących się biegunów – wszystkie wektory własne w modelu są wzajemnie ortogonalne.

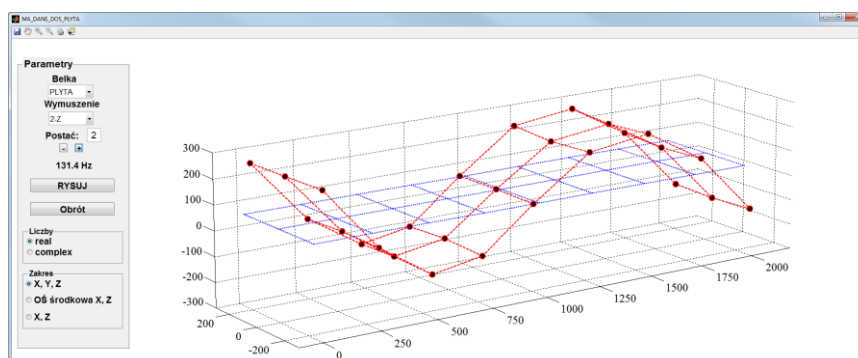


Rys. 2.6 Wykres słupkowy przedstawiający wartości wskaźnika MAC – belka C1, wymuszenie 1-Z

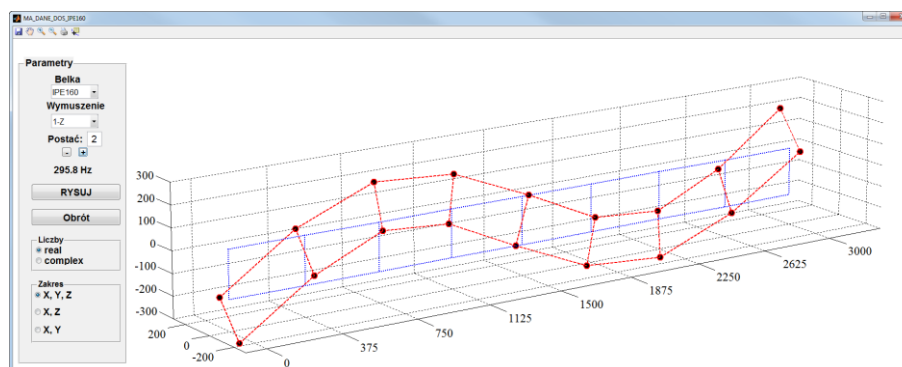
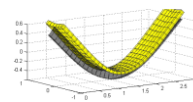
Podczas analizy wyników badań doświadczalnych posiadano ograniczony dostęp do oprogramowania *Test.Lab*, dlatego też, zdecydowano się na stworzenie własnego modułu programu w środowisku MATLAB do prezentacji graficznej wyznaczonych charakterystyk dynamicznych. Dane te wyeksportowano z programu LMS do plików o odpowiednim formacie, a następnie za pomocą oprogramowania typu MATLAB oraz Excel dokonano obróbki, która umożliwiała prezentację graficzną. Pierwszy opracowany program umożliwiał wizualizację postaci drgań dla każdej częstotliwości drgań własnych (Rys. 2.7, Rys. 2.8, Rys. 2.9).



Rys. 2.7 Program do prezentacji graficznej postaci drgań własnych – belka C1

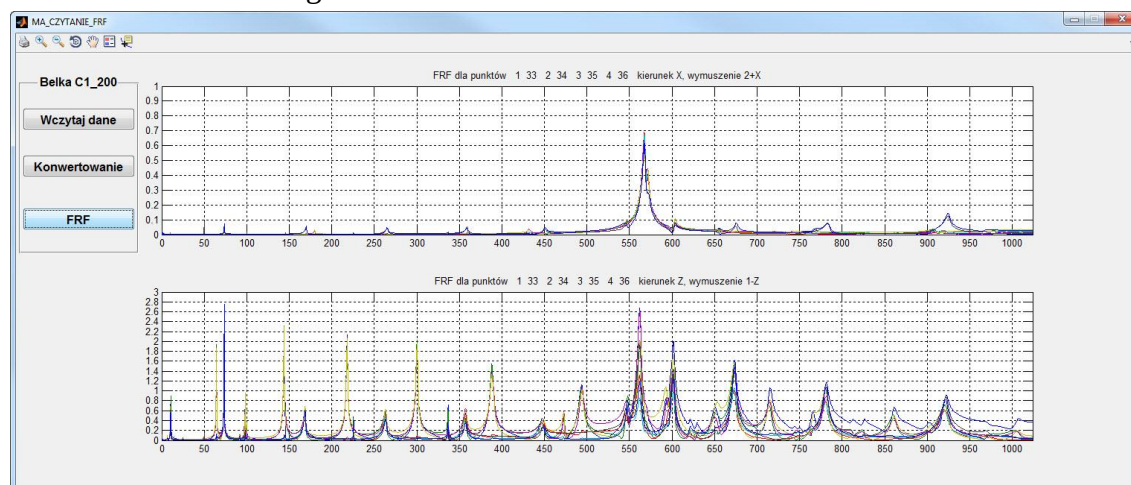


Rys. 2.8 Program do prezentacji graficznej postaci drgań własnych – PLYTA



Rys. 2.9 Program do prezentacji graficznej postaci drgań własnych – belka stalowa IPE 160

Podczas badań charakterystyk dynamicznych uzyskano częstotliwościowe funkcje przejścia FRF, które wykorzystano do identyfikacji tłumienia. Do przeprowadzenia procesu identyfikacji konieczne było wyznaczenie szczytowych wartości amplitud na przebiegu FRF odpowiadającym kolejnym rezonansom drgań płyty, belki zespolonej i dwuteownika stalowego.



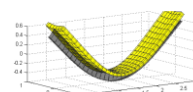
Rys. 2.10 Program do analizy przebiegów częstotliwościowych funkcji przejścia (FRF) – belka C1

Stworzono własne oprogramowanie w środowisku MATLAB, które automatycznie określało wartości szczytowe amplitud na przebiegu FRF odpowiadającym kolejnym rezonansom. Program umożliwiał określanie wartości w formie tabelarycznej i graficznej (Rys. 2.10).

2.5. Badania doświadczalne belek zespolonych

Badania doświadczalne charakterystyk dynamicznych rozpoczęto od przeprowadzenia testu impulsowego według opisanego algorytmu w rozdziale 2.3 dla belek. Badania doświadczalne charakterystyk dynamicznych rozpoczęto od przeprowadzenia testu impulsowego według opisanego algorytmu w rozdziale 2.3 dla płyty żelbetowej. Sposób podwieszenia belki zespolonej podczas badań pokazano na rysunku (Rys. 2.11.a). Podczas badania wymuszenia belki zespolonej wykonano w trzech punktach (Rys. 2.11.b):

2-Z – uderzenie młotkiem modalnym pionowo z góry w osi belki,



1-Z – uderzenie młotkiem modalnym pionowo z góry na skraju belki,

2+X – uderzenie młotkiem modalnym poziomo od czoła belki.

Punkty wymuszeń na rysunku oznaczono symbolem . Różne miejsca wymuszenia miały na celu wzbudzenie różnych form drgań belki zespolonej, co zestawiono poniżej w tabeli 2.4.

Tabela 2.4 Zestawienie punktów oraz kierunków wymuszeń

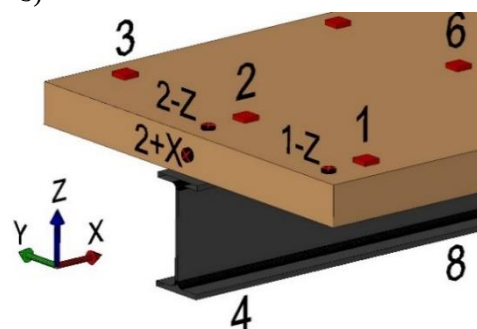
Oznaczenie	Wymuszenie		Wzbudzane formy drgań płyty
	Punkt	Kierunek	
1-Z	1	Z	giętne, skrętne i giętne pasa dolnego
2-Z	2	Z	giętne
2+X	2	X	osiowe

Do badań przyjęto siatkę 36 równomiernie rozłożonych po długości punktów pomiarowych, z czego 27 znajdowało się na górnej powierzchni płyty żelbetowej, pozostałe 9 na pasie dolnym belki stalowej. (Rys. 2.11.c).

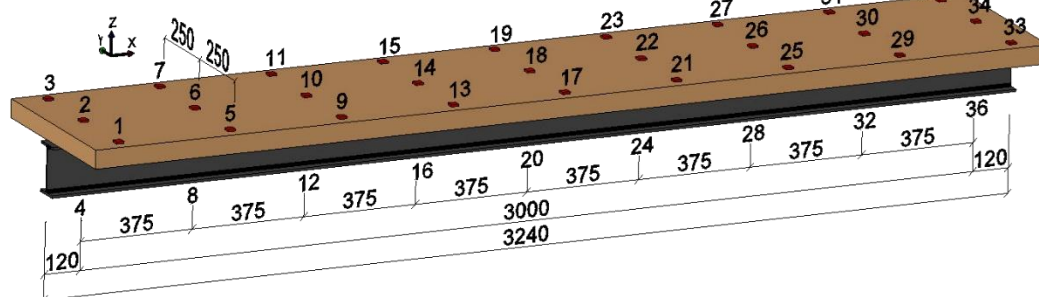
a)



b)



c)



Rys. 2.11 Badana belka zespolona: a) podwieszona belka podczas badań; b) punkty wymuszania; c) siatka punktów pomiarowych

Otrzymane częstotliwości drgań własnych i tłumienie modalne dla poszczególnych punktów wymuszeń (1-Z, 2-Z, 2+X) belek zespolonych przedstawiono w *Załączniku A* pracy w następujących tabelach:

- belka zespolona C1 – Tabela Z.1,
- belka zespolona C2 – Tabela Z.2,
- belka zespolona C3 – Tabela Z.3.

Poniżej w tabeli 2.5 przedstawiono porównanie wyników form giętnych i skrętnych dla badanych belek zespolonych.

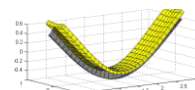


Tabela 2.5 Częstotliwości drgań własnych i tłumienie modalne beleki C1, C2, C3, drgania giętne, drgania skrętne, dla wymuszenia 1-Z

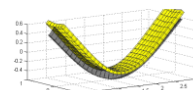
Nazwa belki		C1		C2		C3	
Parametr		f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]	f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]	f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]
drgania giętne	1 _g	73,38	0,16	73,59	0,17	75,37	0,14
	2 _g	167,41	0,76	166,03	0,70	174,82	0,48
	3 _g	262,02	0,58	262,24	0,60	277,68	0,49
	4 _g	356,48	0,46	356,25	0,54	378,80	0,46
	5 _g	446,75	0,58	456,09	0,61	485,53	0,47
drgania skrętne	1 _s	64,24	0,26	64,55	0,26	66,35	0,27
	2 _s	143,66	0,33	143,06	0,27	146,60	0,26
	3 _s	217,68	0,37	216,90	0,35	221,42	0,35
	4 _s	299,75	0,36	298,18	0,28	302,83	0,33
	5 _s	387,92	0,45	383,97	0,42	394,70	0,46

Analizując dane zawarte w tabeli można zaobserwować, że wartości częstotliwości i tłumienia modalnego dla belek zespolonych C1 i C2 są zbliżone. Dopiero zmniejszenie rozstawu kołków stalowych do 100 mm dla belki C3 wpływa znacząco na sztywność belki, co powoduje zmianę otrzymywanych częstotliwości. Różnice te można zaobserwować zarówno dla zmiany rozstawu z 200 mm na 100 mm oraz ze 150 mm na 100 mm. Prawie żadnych różnic nie zaobserwowano przy zmianie rozstawu z 200 mm na 150 mm. Porównanie to pokazuje, że zmiana sztywności belki zespolonej ze względu na zastosowany rozstaw kołków stalowych nie jest proporcjonalna. Obniżenie częstotliwości można zaobserwować zarówno dla form drgań giętnych (2-8%), jak i skrętnych (1-3%). Takiego samego porównania dokonano dla otrzymanych wartości częstotliwości drgań osiowych co przedstawiono w tabeli 2.6.

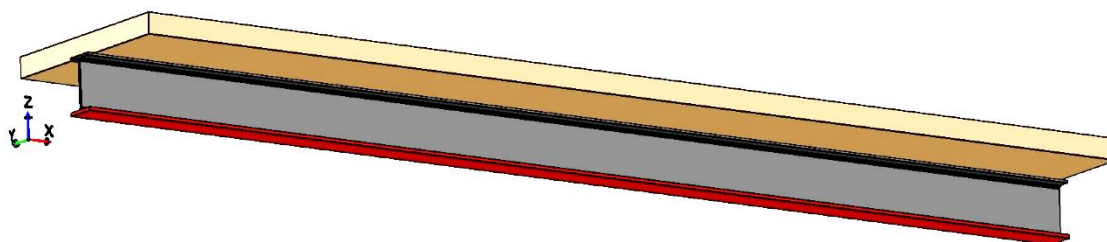
Tabela 2.6 Częstotliwości drgań własnych i tłumienie modalne beleki C1, C2, C3, drgania osiowe, dla wymuszenia 2+X

Nazwa belki		C1		C2		C3	
Parametr		f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]	f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]	f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]
1 _o		567,30	0,28	559,64	0,46	573,08	0,64

Na wartość tej częstotliwości ma wpływ osiowa sztywność belki, która jest funkcją jej pola przekroju oraz sztywności materiałów wyrażonej poprzez moduł sprężystości podłużnej. Drgania osiowe powstają na skutek naprzemiennego wydłużania się i skracania się zarówno płyty żelbetowej jak i dwuteownika stalowego. Siły powstające w zespoleniu są niewielkie i mają nieznaczny wpływ na ten proces. Gęstość rozstawu zespolenia nie ma istotnego wpływu na sztywność osiową belki, co można zaobserwować po niewielkich różnicach wartości częstotliwości osiowych 1-2%.



Analizując postacie drgań belek zespolonych zauważono, że wśród zidentyfikowanych postaci drgań giętnych pojawiły się dodatkowo postacie dla pasa dolnego kształtownika zlokalizowane w płaszczyźnie X-Y tego pasa (Rys. 2.12).



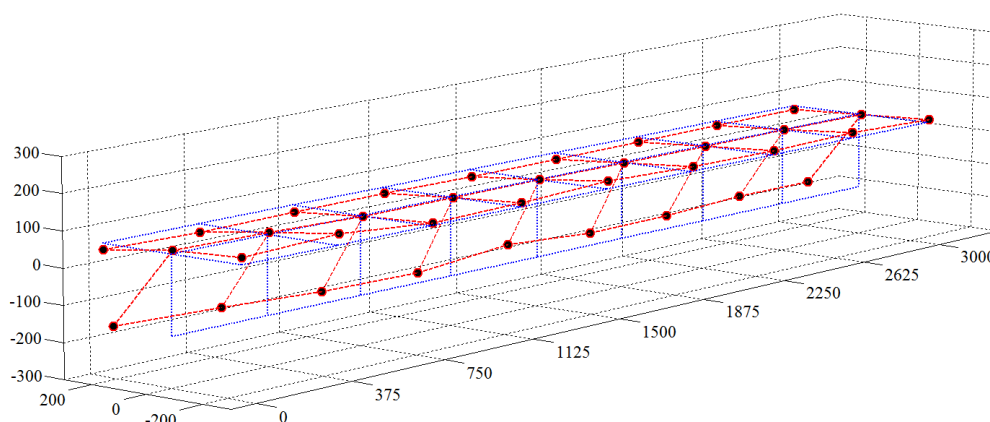
Rys. 2.12 Belka zespolona z zaznaczonym pasem dolnym kształtownika

Postacie te uzyskano w trakcie wymuszenia w punkcie 1-Z. Podczas analizy otrzymanych częstotliwości i postaci drgań własnych z modelu modalnego uzyskano 5 form drgań pasa dolnego. Wartości częstotliwości drgań własnych oraz tłumień modalnych przedstawiono w tabeli 2.7.

Tabela 2.7 Częstotliwości drgań własnych i tłumienie modalne beleki C1, C2, C3, drgania pasa dolnego, dla wymuszenia 1-Z

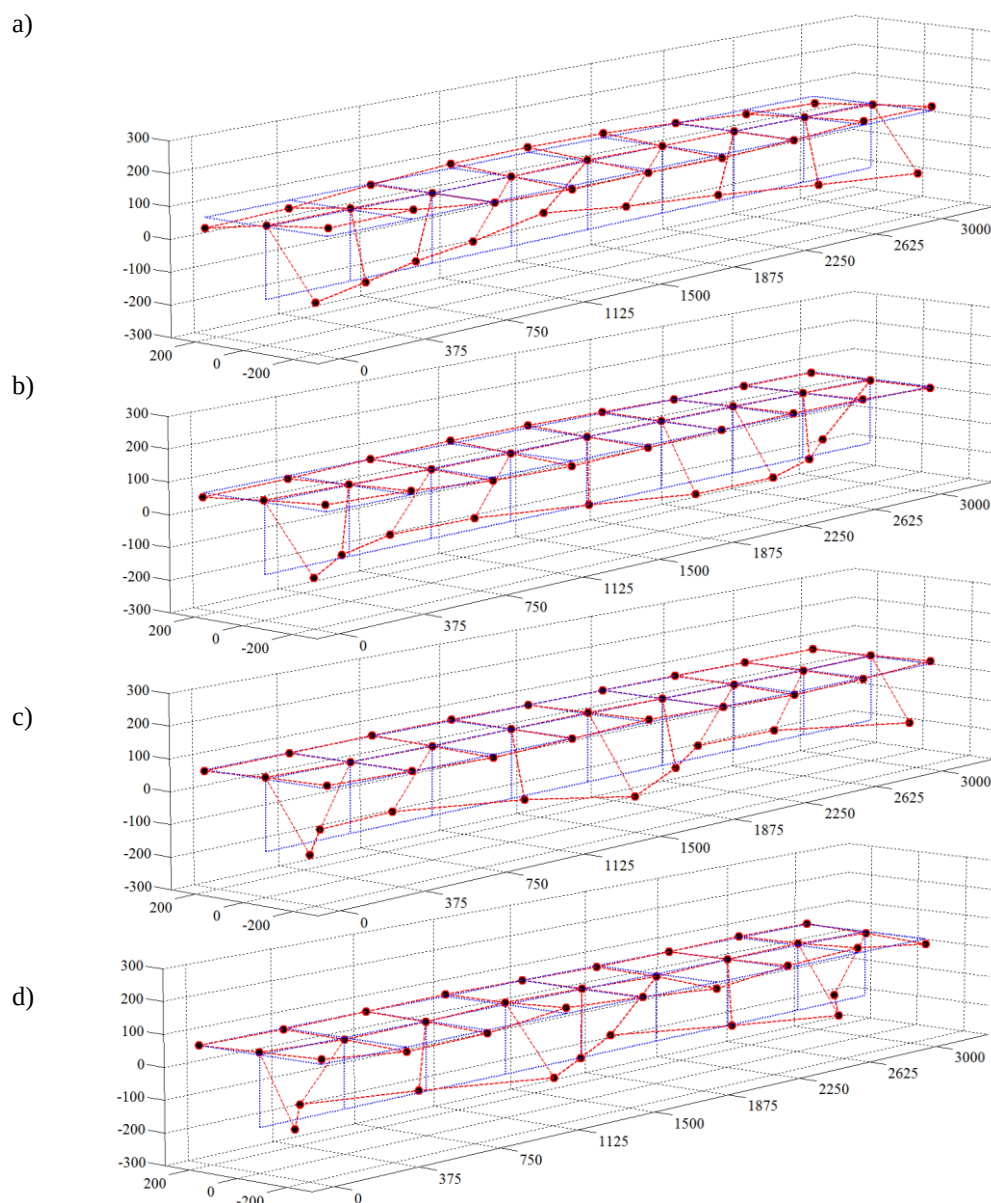
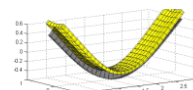
Nazwa belki	C1		C2		C3	
Parametr	f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]	f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]	f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]
0_{pd}	92,03	0,11	92,87	0,06	94,90	0,08
1_{pd}	99,89	0,07	99,95	0,14	102,41	0,06
2_{pd}	145,65	0,06	146,20	0,05	148,49	0,03
3_{pd}	225,21	0,05	225,75	0,04	227,40	0,03
4_{pd}	336,38	0,08	336,90	0,06	338,35	0,04

Drgania te to pozioma (płaszczyzna X-Y) postać drgań giętnych pasa dolnego dwuteownika stalowego, podczas gdy płyta żelbetowa nie odkształca się znacząco. Pierwsza postać drgań jaką wykryto dla pasa dolnego nazwano „ 0_{pd} ”, która odpowiada ruchowi całego kształtownika względem płyty żelbetowej (Rys. 2.13).



Rys. 2.13 „Zerowa” postać drgań pasa dolnego ($0_{pd}=92,03$ Hz) – belka C1

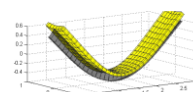
Kolejne postacie drgań są to typowe formy drgań giętnych pasa dolnego dwuteownika stalowego, co pokazano na kolejnym rysunku (Rys. 2.14).



Rys. 2.14 Formy drgań giętnych pasa dolnego – belka C1: a) $1_{pd}=99,89$ Hz; b) $2_{pd}=145,65$ Hz; c) $3_{pd}=225,21$ Hz; d) $4_{pd}=336,38$ Hz;

Analizując postać drgań pasa dolnego należy zauważyć, że kształtownik w formie dwuteownika nie pracuje jako cały element. Na skutek zespolenia z płytą żelbetową pas górny i część środnika zostaje usztywniona, a pas dolny wykazuje dużą podatność objawiającą się postaciami drgań pasa dolnego. Zjawisko to pojawiło się zdaniem autorki głównie dlatego, że zastosowany sposób podwieszenia umożliwia swobodny ruch belki. Gdyby zastosowano schemat belki wolnopodpartej uniknięto by tego zjawiska ale nie wiadomymi stałyby się podatności podpór.

Porównując wyniki dla odpowiednich belek zespolonych można zauważyć, że największe zmiany otrzymuje się dla „zerowej” postaci drgań giętnych 1-3%. Jak widać różnica w zastosowanym rozstawie kołków stalowych ma znaczenie dla uzyskanej wartości. Największą różnicę obserwujemy się porównując belkę C1 do C3, gdzie zastosowano rozstaw kołków stalowych dla pierwszej belki zespolonej 200 mm, a dla tej



drugiej 100 mm. Częstotliwości drgań własnych pasa dolnego zależną od rozstawu i rodzaju kołków zespalających, a nie zależą od łączonych elementów. Wniosek ten będzie miał istotny wpływ na zastosowany w następnym rozdziale model zespolenia kształtownika stalowego z płytą żelbetową.

Do identyfikacji tłumienia niezbędne było wyznaczenie szczytowych wartości amplitud na przebiegu FRF odpowiadającym kolejnym rezonansom drgań belki zespolonej. Analizowano trzy rodzaje drgań: drgania giętne wzbudzone przy wymuszeniu 2-Z, drgania skrętne przy wymuszeniu w punkcie 1-Z i drgania osiowe przy wymuszeniu w punkcie 2-X. Dla drgań giętnych i skrętnych określano szczytowe wartości amplitud dla pięciu rezonansów. Za to dla drgań osiowych wartości szczytowe amplitud ($A-FRF$) określono tylko dla jednego rezonansu. Do analizy (przeprowadzonej w rozdziale 4.2) wybrano FRF dla ośmiu reprezentatywnych punktów pomiarowych. Dla drgań giętnych, wymuszenia 2-Z wybrano punkty 2, 4, 34 i 36 znajdujące się na osi płyty żelbetowej i kształtownika stalowego oraz punkty 1, 3, 33 i 35 znajdujące się w narożach płyty żelbetowej (Rys. 2.11). Dla drgań skrętnych i osiowych, wymuszenia 1-Z i 2-X wybrano punkty 1, 3, 33 i 35 znajdujące się w narożach płyty żelbetowej (Rys. 2.11). Wartości szczytowych amplitud ($A-FRF$) odpowiadających kolejnym rezonansom dla belki C1 zestawiono w tabeli 2.8 i tabeli 2.9 od wymuszenia 2-Z, w tabeli 2.10 od wymuszenia 1-Z i w tabeli 2.11 od wymuszenia 2-X.

Tabela 2.8 Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla belki zespolonej C1, wymuszenie 2-Z, kierunek Z

WYMUSZENIE 2-Z								
Punkt	1		3		33		35	
i	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]
1 _g	2,729	73,50	2,552	73,50	2,628	73,50	2,622	73,50
2 _g	0,640	169,00	0,634	169,00	0,601	169,00	0,612	169,00
3 _g	0,480	263,50	0,506	263,50	0,474	263,25	0,497	263,50
4 _g	0,514	357,75	0,607	358,00	0,428	357,75	0,514	357,75
5 _g	0,418	449,25	0,369	449,50	0,318	448,50	0,321	448,75

Tabela 2.9 Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla belki zespolonej C1, wymuszenie 2-Z, kierunek Z

WYMUSZENIE 2-Z								
Punkt	2		4		34		36	
i	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]
1 _g	2,628	73,50	2,600	73,50	2,600	73,50	2,595	73,50
2 _g	0,568	169,00	0,548	169,00	0,537	169,00	0,526	169,00
3 _g	0,404	263,25	0,351	263,50	0,400	263,25	0,360	263,25
4 _g	0,435	357,75	0,320	357,75	0,381	357,75	0,299	357,50
5 _g	0,307	448,75	0,196	448,75	0,302	448,75	0,225	448,75

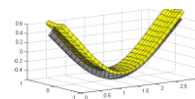


Tabela 2.10 Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla belki zespolonej C1, wymuszenie 1-Z, kierunek Z

WYMUSZENIE 1-Z								
Punkt	1		3		33		35	
i	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]
1 _s	1,892	64,25	1,879	64,25	1,933	64,25	1,867	64,25
2 _s	2,248	143,75	2,274	144,00	2,313	143,75	2,305	144,00
3 _s	2,131	218,00	2,093	218,00	2,075	218,00	2,064	218,00
4 _s	1,968	300,25	1,917	300,25	2,030	300,25	1,968	300,25
5 _s	1,542	388,25	1,360	388,25	1,530	388,25	1,328	388,00

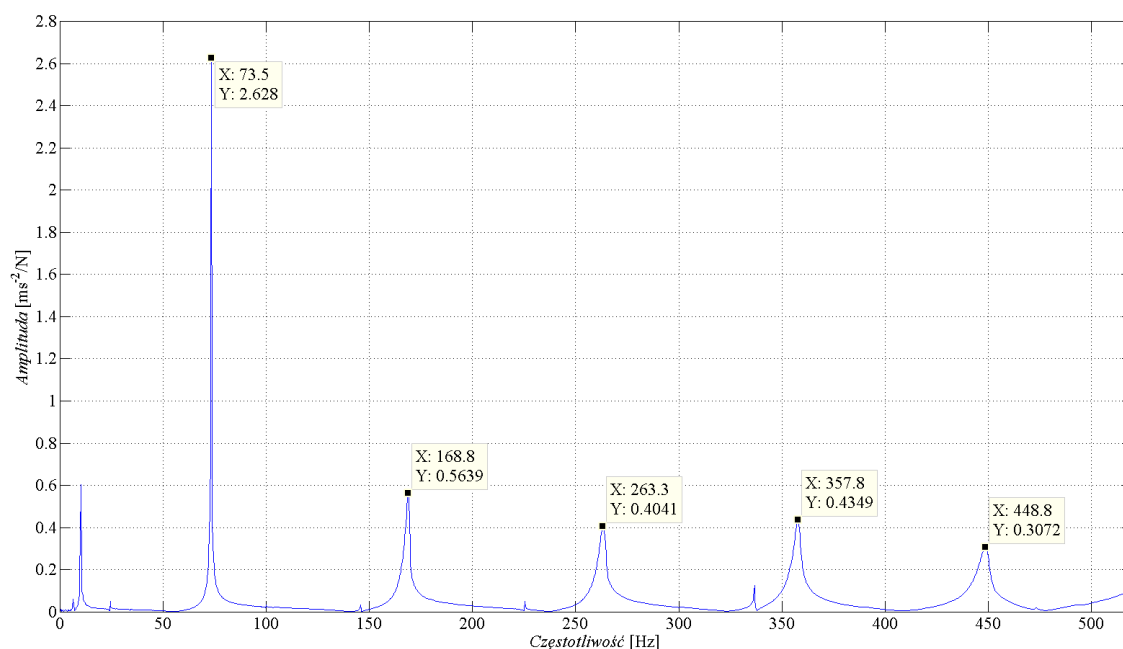
Tabela 2.11 Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla belki zespolonej C1, wymuszenie 2+X, kierunek X

WYMUSZENIE 2+X								
Punkt	1		3		33		35	
i	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]
1 _o	0,641	567,50	0,634	567,25	0,627	567,50	0,581	567,25

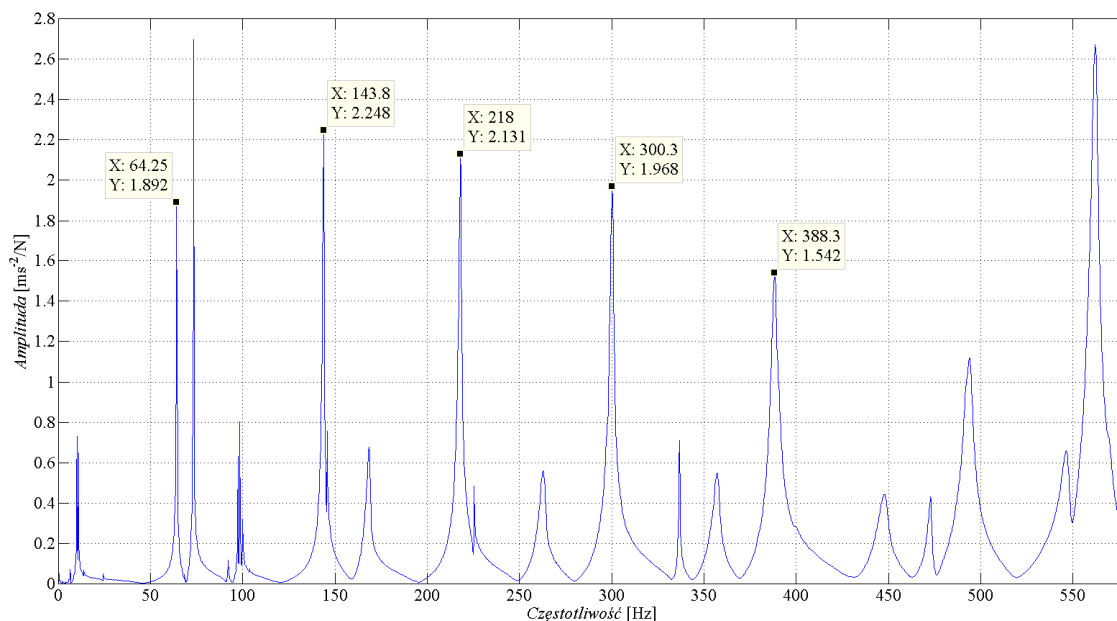
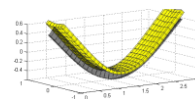
Wyniki dla pozostałych belek zespolonych zestawiono w *Załączniku A* pracy w następujących tabelach:

- belka zespolona C2 – Tabela Z.4, Tabela Z.5, Tabela Z.6 i Tabela Z.7,
- belka zespolona C3 – Tabela Z.8, Tabela Z.9, Tabela Z.10 i Tabela Z.11.

Na rysunkach (Rys. 2.15 i Rys. 2.16) przedstawiono przebiegi amplitudowe częstotliwościowej funkcji przejścia z zaznaczonymi wartościami rezonansów według badań doświadczalnych dla płyty żelbetowej.



Rys. 2.15 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla belki zespolonej C1, wymuszenie 2-Z, punkt 2, kierunek Z



Rys. 2.16 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla belki zespolonej C1, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z

Wykresy dla pozostałych przebiegów częstotliwościowych funkcji przejścia dla belek zespolonych zestawiono w Załączniku B pracy na następujących rysunkach:

- belka zespolona C1 – Rys. Z. 1 do Rys. Z. 14,
- belka zespolona C2 – Rys. Z. 15 do Rys. Z. 30,
- belka zespolona C3 – Rys. Z. 31 do Rys. Z. 46.

2.6. Badania doświadczalne płyty i dwuteownika IPE160

Badania doświadczalne płyty żelbetowej i belki stalowej IPE160 przeprowadzono na tym samym stanowisku badawczym na którym badano belki zespolone. Sposób podwieszenia płyty podczas badań pokazano na Rys. 2.17.a. Do wymuszeń drgań zastosowano badanie impulsowe. Podczas badania impulsowego stosowano wymuszenia (☒) w trzech punktach (Rys. 2.17.b):

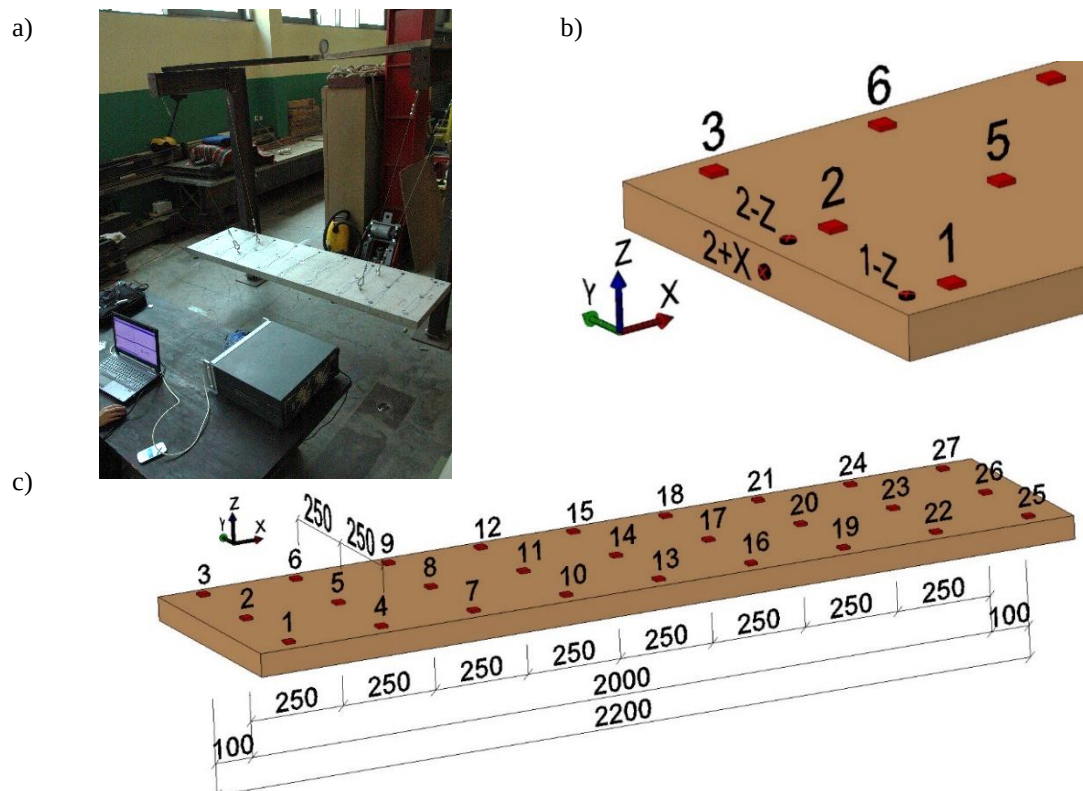
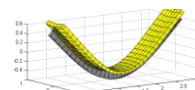
- 2-Z – uderzenie młotkiem modalnym pionowo z góry w osi płyty,
- 1-Z – uderzenie młotkiem modalnym pionowo z góry na skraju płyty,
- 2+X – uderzenie młotkiem modalnym poziomo od czoła płyty.

Różne miejsca wymuszenia miały na celu wzbudzenie różnych form drgań płyty, co zestawiono w poniższej tabeli 2.12.

Tabela 2.12 Zestawienie punktów oraz kierunków wymuszeń dla płyty żelbetowej

Oznaczenie	Wymuszenie		Wzbudzane formy drgań płyty
	Punkt	Kierunek	
1-Z	1	Z	giętne i skrętne
2-Z	2	Z	giętne
2+X	2	X	osiowe

Punkty pomiarowe znajdowały się na górnej powierzchni płyty i były rozłożone w trzech rzędach po 9 punktów w każdym, co w sumie dawało 27 punktów pomiarowych (Rys. 2.17.c).

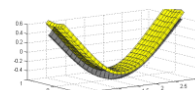


Rys. 2.17 Badana płyta: a) podwieszana płyta podczas badań; b) punkty wymuszania; c) siatka punktów pomiarowych

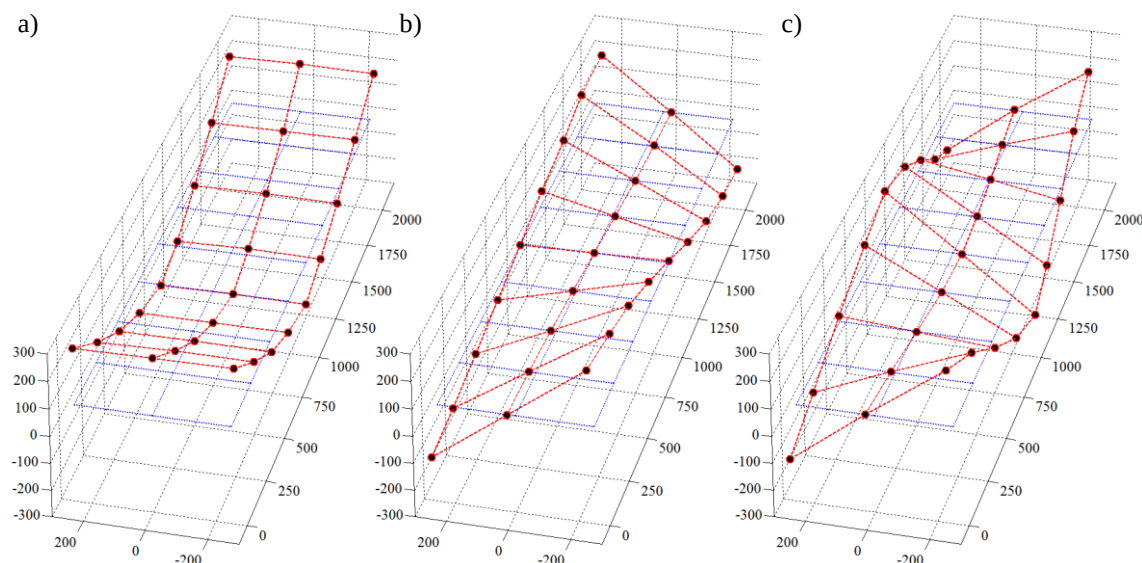
Otrzymane częstotliwości drgań własnych i tłumień modalnych dla poszczególnych punktów wymuszeń płyty przedstawiono w tabeli 2.13.

Tabela 2.13 Częstotliwości drgań własnych i tłumienie modalne płyty żelbetowej

PŁYTA ŻELBETOWA 60x600x2200 mm						
Wymuszenie	1-Z		2-Z		2+X	
i	f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]	f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]	f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]
1 _g	47,63	0,28	47,66	0,27	-	-
2 _g	131,28	0,30	131,35	0,29	-	-
3 _g	252,68	0,35	252,78	0,34	-	-
4 _g	417,79	0,45	418,13	0,42	-	-
5 _g	616,70	0,41	617,08	0,41	-	-
1 _o	-	-	-	-	886,51	0,20
1 _s	109,03	0,32	-	-	-	-
2 _s	223,32	0,26	-	-	-	-
3 _s	351,79	0,29	-	-	-	-
4 _s	502,46	0,33	-	-	-	-
5 _s	671,93	0,33	-	-	-	-



Na rysunku poniżej (Rys. 2.18) przedstawiono wybrane postacie drgań płyty wykorzystując opisany program do prezentacji graficznej postaci drgań własnych.



Rys. 2.18 Postacie drgań giętne i skrętne dla badanej PŁYTY, wymuszenie 1-Z:
a) $1_g=47,63$ Hz; b) $1_s=109,03$ Hz; c) $2_s=223,32$ Hz;

Do identyfikacji tłumienia niezbędne było wyznaczenie szczytowych wartości amplitud na przebiegu FRF odpowiadającym kolejnym rezonansom drgań płyty. Analizowano dwa rodzaje drgań: drgania giętne wzbudzone przy wymuszeniu 2-Z i drgania skrętne przy wymuszeniu w punkcie 1-Z. Dla drgań giętnych i skrętnych określano szczytowe wartości amplitud dla pięciu rezonansów. Do analizy wybrano FRF dla ośmiu reprezentatywnych punktów pomiarowych. Dla drgań giętnych, wymuszenia 2-Z wybrano punkty 2, 5, 23 i 26 znajdujące się na osi płyty żelbetowej (Rys. 2.17). Dla drgań skrętnych, wymuszenia 1-Z wybrano punkty 1, 3, 25 i 27 znajdujące się w narożach płyty żelbetowej (Rys. 2.17). Wartości szczytowych amplitud FRF odpowiadających kolejnym rezonansom zestawiono w tabeli 2.14 i w tabeli 2.15.

Tabela 2.14 Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla płyty żelbetowej, wymuszenie 2-Z, kierunek Z

WYMUSZENIE 2-Z								
Punkt	2		5		23		26	
i	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]
1_g	2,481	47,75	0,850	47,75	0,821	47,75	2,452	47,75
2_g	1,919	131,50	0,508	131,50	0,526	131,50	1,896	131,50
3_g	1,232	253,00	1,110	253,00	1,135	253,00	1,226	253,00
4_g	0,712	418,50	1,061	418,50	1,065	418,50	0,692	418,50
5_g	2,400	673,00	2,200	672,75	2,199	672,75	2,341	672,75

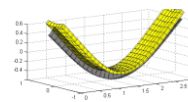
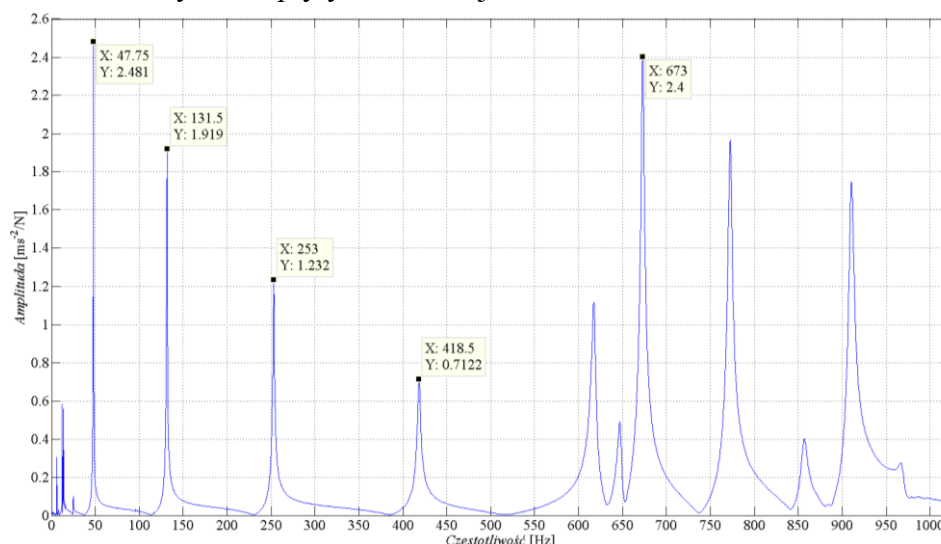


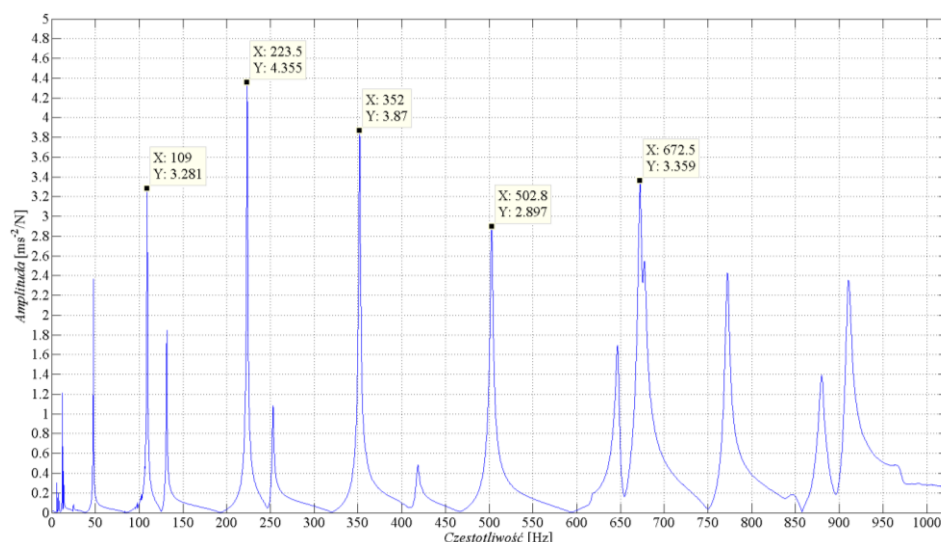
Tabela 2.15 Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla płyty żelbetowej, wymuszenie 1-Z, kierunek Z

WYMUSZENIE 1-Z								
Punkt	1		3		25		27	
i	$A\text{-FRF}$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A\text{-FRF}$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A\text{-FRF}$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A\text{-FRF}$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]
1 _s	3,281	109,00	3,201	109,00	3,289	109,00	3,154	109,00
2 _s	4,355	223,50	4,578	223,50	4,351	223,50	4,559	223,50
3 _s	3,870	352,00	3,902	352,00	3,825	352,00	3,893	352,00
4 _s	2,897	502,75	2,945	503,00	2,787	502,75	2,878	502,75
5 _s	3,359	672,50	2,450	673,50	3,385	672,25	2,322	673,50

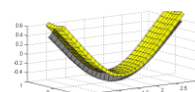
Na rysunkach (Rys. 2.19 i Rys. 2.20) przedstawiono przebiegi amplitudowe częstotliwościowej funkcji przejścia z zaznaczonymi wartościami rezonansów według badań doświadczalnych dla płyty żelbetowej.



Rys. 2.19 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla płyty żelbetowej, wymuszenie 2-Z, punkt 2, kierunek Z

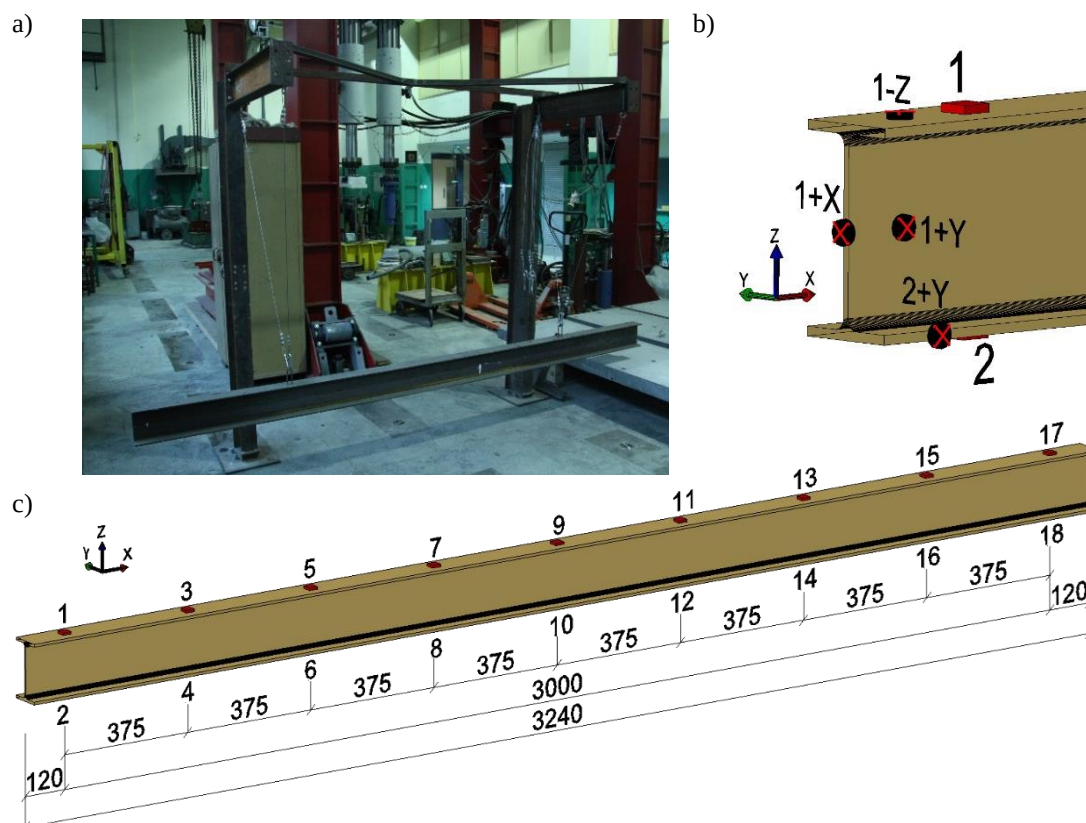


Rys. 2.20 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla płyty żelbetowej, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z



Wykresy dla pozostałych przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia dla płyty żelbetowej zestawiono w *Załączniku B* na rysunkach: Rys. Z. 47 do Rys. Z. 52.

Kolejnym badanym elementem był kształtownik stalowy IPE160. Podwieszony dwuteownik podczas badań pokazano na Rys. 2.21.a. Punkty pomiarowe znajdowały się na osi belki pasa dolnego (9 punktów) i górnego (9 punktów) co łącznie dawało 18 punktów pomiarowych (Rys. 2.21.c).



Rys. 2.21 Badany dwuteownik stalowy: a) podwieszona belka podczas badań; b) punkty wymuszania; c) siatka punktów pomiarowych

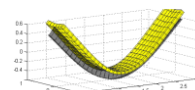
Podczas badania impulsowego dwuteownika stalowego zastosowano wymuszenia (⊗) w czterech punktach (Rys. 2.21.b):

- 2-Z – uderzenie młotkiem modalnym pionowo z góry w osi belki,
- 2+Y – uderzenie młotkiem modalnym poziomo w pas górny na skraju belki,
- 4+Y – uderzenie młotkiem modalnym poziomo w pas dolny na skraju belki,
- 2+X – uderzenie młotkiem modalnym poziomo od czoła belki.

Różne punkty wymuszenia tak jak w płycie miały umożliwić uzyskanie różnych form drgań dla belki stalowej, co zestawiono poniżej w tabeli 2.16.

Tabela 2.16 Zestawienie punktów oraz kierunków wymuszeń dla belki stalowej

Oznaczenie	Wymuszenie		Wzbudzone formy drgań płyty
	Punkt	Kierunek	
1-Z	1	Z	giętne i skrętne
1+Y	1	Y	giętne poziome
1+X	1	X	osiowe
2+Y	2	Y	skrętne i giętne poziome

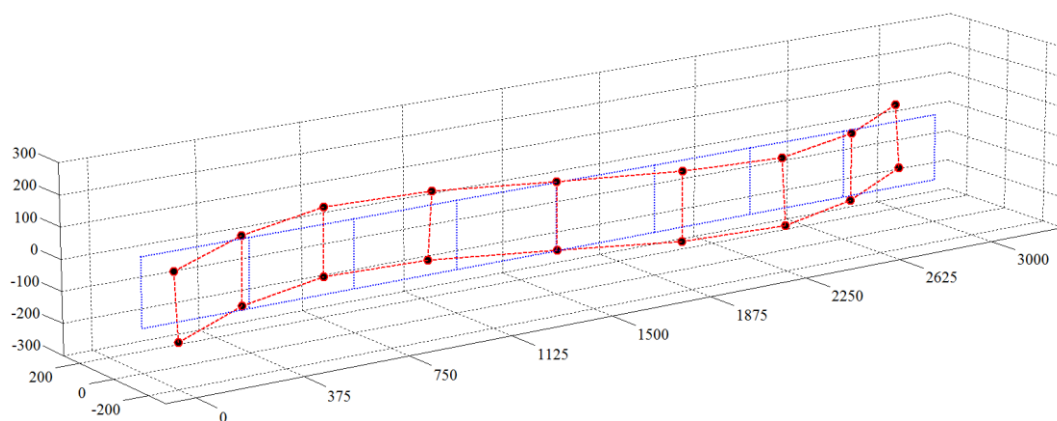


Otrzymane częstotliwości drgań własnych i tłumienia modalne przy różnych wymuszeniach belki stalowej przedstawiono w tabeli 2.17 i wybrane postacie drgań w formie graficznej (Rys. 2.22).

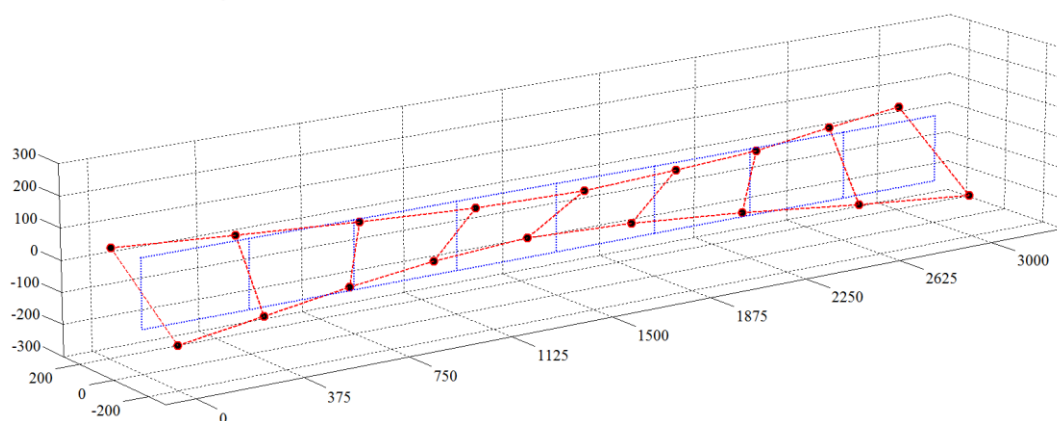
Tabela 2.17 Częstotliwości drgań własnych i tłumienie modalne belki stalowej IPE 160

BELKA STALOWA IPE160								
Wymuszenie	1-Z		1+Y		2+Y		1+X	
i	f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]	f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]	f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]	f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]
1 _g	113,39	0,03	-	-	-	-	-	-
2 _g	295,79	0,09	-	-	-	-	-	-
3 _g	541,82	0,10	-	-	-	-	-	-
4 _g	824,29	0,27	-	-	-	-	-	-
1 _o	800,5	0,02%	-	-	800,47	0,01	800,50	0,01
1 _s	-	-	-	-	33,44	0,18	-	-
2 _s	75,22	0,02	-	-	75,23	0,03	-	-
3 _s	137,92	0,07	-	-	137,92	0,06	-	-
4 _s	223,22	0,54	-	-	223,44	0,48	-	-
5 _s	353,12	0,07	-	-	353,00	0,06	-	-
1 _{gp}	-	-	32,49	0,02	-	-	-	-
2 _{gp}	-	-	88,86	0,03	88,85	0,03	-	-
3 _{gp}	-	-	171,47	0,03	171,47	0,03	-	-
4 _{gp}	-	-	276,40	0,05	276,41	0,05	-	-
5 _{gp}	-	-	391,57	0,03	391,56	0,04	-	-

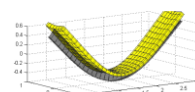
a)



b)



Rys. 2.22 Postać drgań giętna pozioma i skrętne dla badanego dwuteownika stalowego IPE160: a) wymuszenie 1+Y, 2_g=88,86 Hz; b) wymuszenie 2+Y 2_s=75,23 Hz;



W przypadku kształtownika stalowego, także wyznaczono szczytowe wartości amplitud na przebiegu FRF odpowiadającym kolejnym rezonansom drgań belki. Analizowano cztery rodzaje drgań: drgania giętne wzbudzone przy wymuszeniu 1-Z, drgania skrętne i giętne poziome przy wymuszeniu w punkcie 2+Y oraz drgania osiowe przy wymuszeniu w punkcie 1+X. Dla drgań giętnych określano szczytowe wartości amplitud dla czterech rezonansów na kierunku Z. Dla drgań skrętnych i giętnych poziomych określano szczytowe wartości amplitud dla pięciu rezonansów na kierunku Y. Dla drgań osiowych określano tylko dla jednego rezonansu szczytową wartość amplitudy na kierunku X. Do analizy wybrano FRF dla sześciu reprezentatywnych punktów pomiarowych. Dla drgań giętnych, wymuszenia 1-Z wybrano punkty 1, 2, 17 i 18 (Rys. 2.21). Dla drgań skrętnych i giętnych poziomych, wymuszenia 1+Y wybrano punkty 1, 3, 16 i 18 (Rys. 2.21). Dla drgań osiowych, wymuszenia 1+X wybrano punkty 1, 2, 17 i 18 (Rys. 2.21). Wartości szczytowych amplitud FRF odpowiadających kolejnym rezonansom zestawiono w tabeli 2.18 w tabeli 2.19 i w tabeli 2.20.

Tabela 2.18 Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla płyty żelbetowej, wymuszenie 1-Z, kierunek Z

WYMUSZENIE 1-Z								
Punkt	1		2		17		18	
i	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]
1 _g	14,096	113,00	13,949	113,00	14,089	113,00	13,986	113,00
2 _g	18,643	296,00	19,712	296,00	18,260	296,00	19,470	296,00
3 _g	14,932	542,00	11,219	542,00	14,663	542,00	10,374	542,00
4 _g	2,751	825,00	4,441	825,00	2,650	825,00	4,231	825,00

Tabela 2.19 Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla płyty żelbetowej, wymuszenie 2+Y, kierunek Y

WYMUSZENIE 2+Y								
Punkt	1		3		16		18	
i	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]
1 _s	4,543	32,00	2,109	32,00	2,246	32,00	4,772	32,00
1 _{gp}	4,413	34,00	3,043	34,00	2,697	34,00	4,012	34,00
2 _s	12,640	75,00	5,228	75,00	5,122	75,00	12,564	75,00
2 _{gp}	9,395	89,00	1,699	89,00	1,971	89,00	9,886	89,00
3 _s	18,921	138,00	1,578	138,00	2,007	138,00	20,249	138,00
3 _{gp}	7,392	172,00	5,627	171,00	6,811	171,00	8,675	171,00
4 _s	1,673	224,00	1,122	224,00	1,197	223,00	1,871	223,00
4 _{gp}	5,419	276,00	7,538	276,00	9,228	276,00	7,281	276,00
5 _s	13,934	353,00	17,128	353,00	23,202	353,00	17,321	353,00
5 _{gp}	5,928	392,00	6,850	392,00	8,909	392,00	7,187	392,00

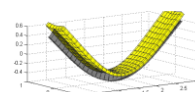
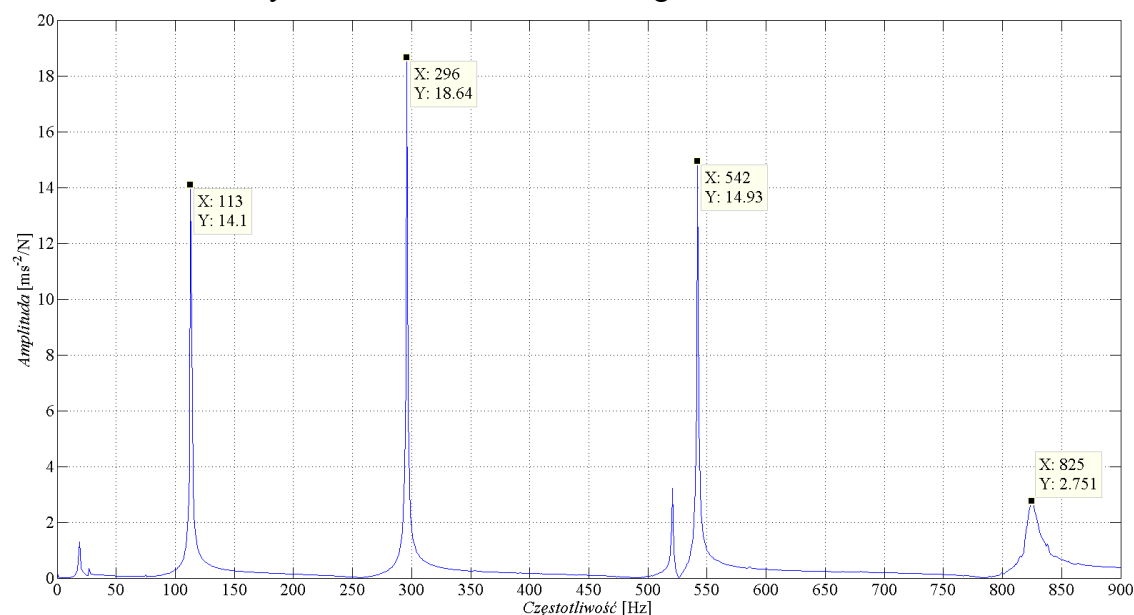


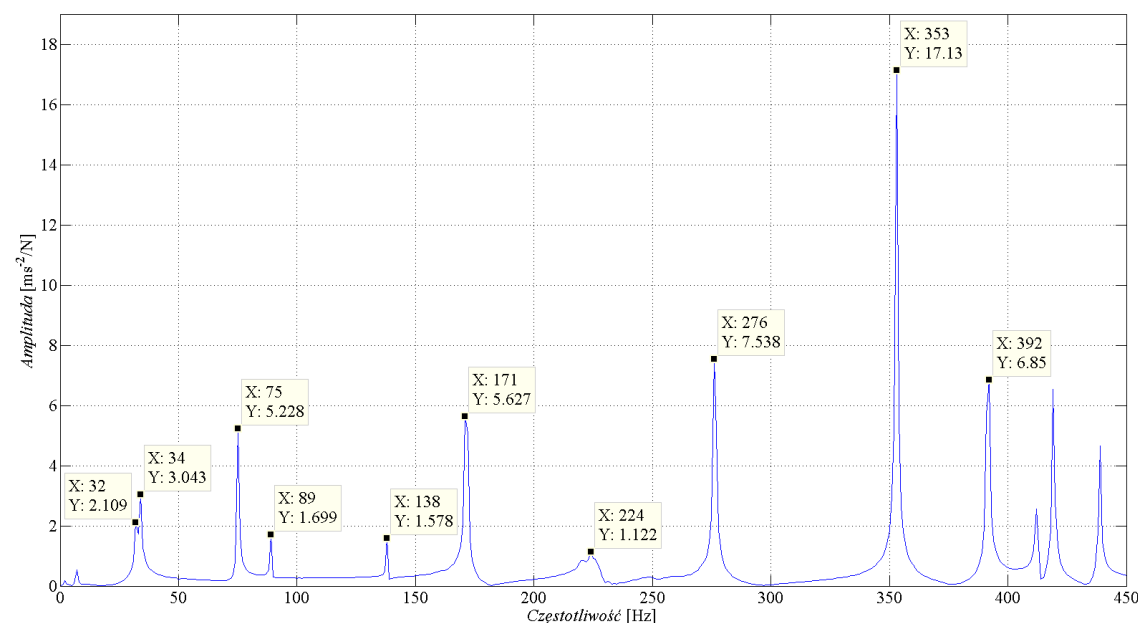
Tabela 2.20 Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla płyty żelbetowej, wymuszenie $1+X$, kierunek X

WYMUSZENIE $1+X$								
Punkt	1		2		17		18	
i	$A\text{-FRF}$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A\text{-FRF}$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A\text{-FRF}$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A\text{-FRF}$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]
1_0	46,563	801,00	50,772	801,00	46,058	801,00	50,580	801,00

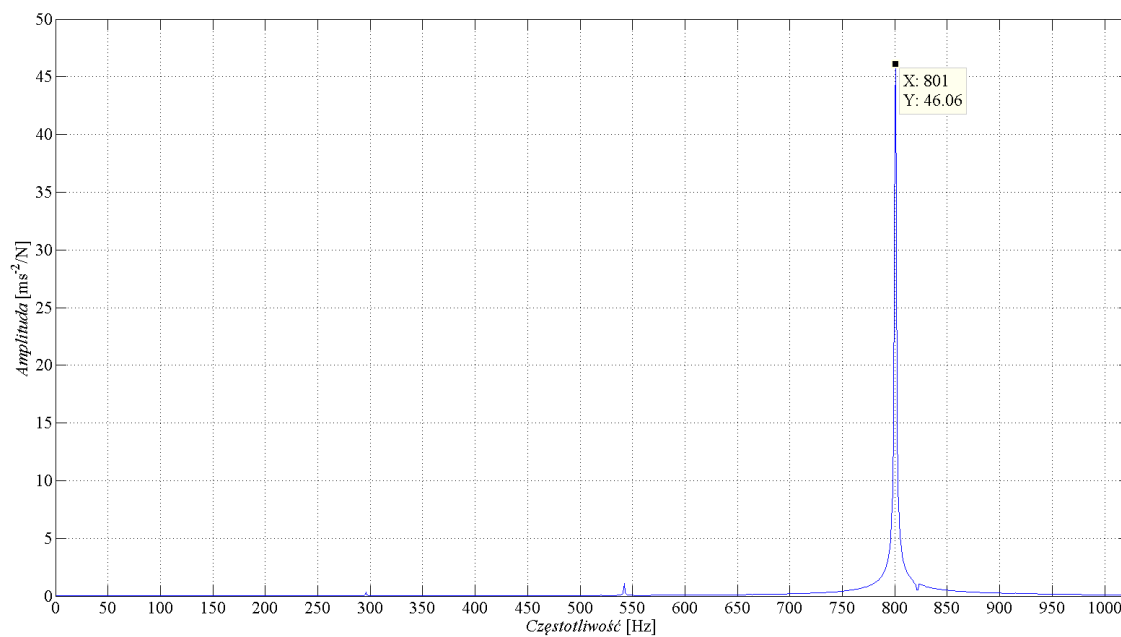
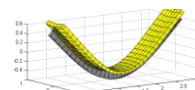
Na rysunkach (Rys. 2.23, Rys. 2.24 i Rys. 2.25) przedstawiono przebiegi amplitudowe częstotliwościowej funkcji przejścia z zaznaczonymi wartościami rezonansów według badań doświadczalnych dla kształtownika stalowego.



Rys. 2.23 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla kształtownika stalowego, wymuszenie $1-Z$, punkt 1, kierunek Z



Rys. 2.24 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla kształtownika stalowego, wymuszenie $2+Y$, punkt 3, kierunek Y



Rys. 2.25 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla kształtownika stalowego, wymuszenie 2+X, punkt 17, kierunek X

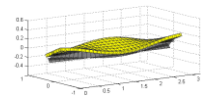
Wykresy dla pozostałych przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia dla płyty żelbetowej zestawiono w *Załączniku B* na rysunkach: Rys. Z. 53 do Rys. Z. 61.

3. Model drgań przestrzennych belek zespolonych w konwencji metody sztywnych elementów skończonych

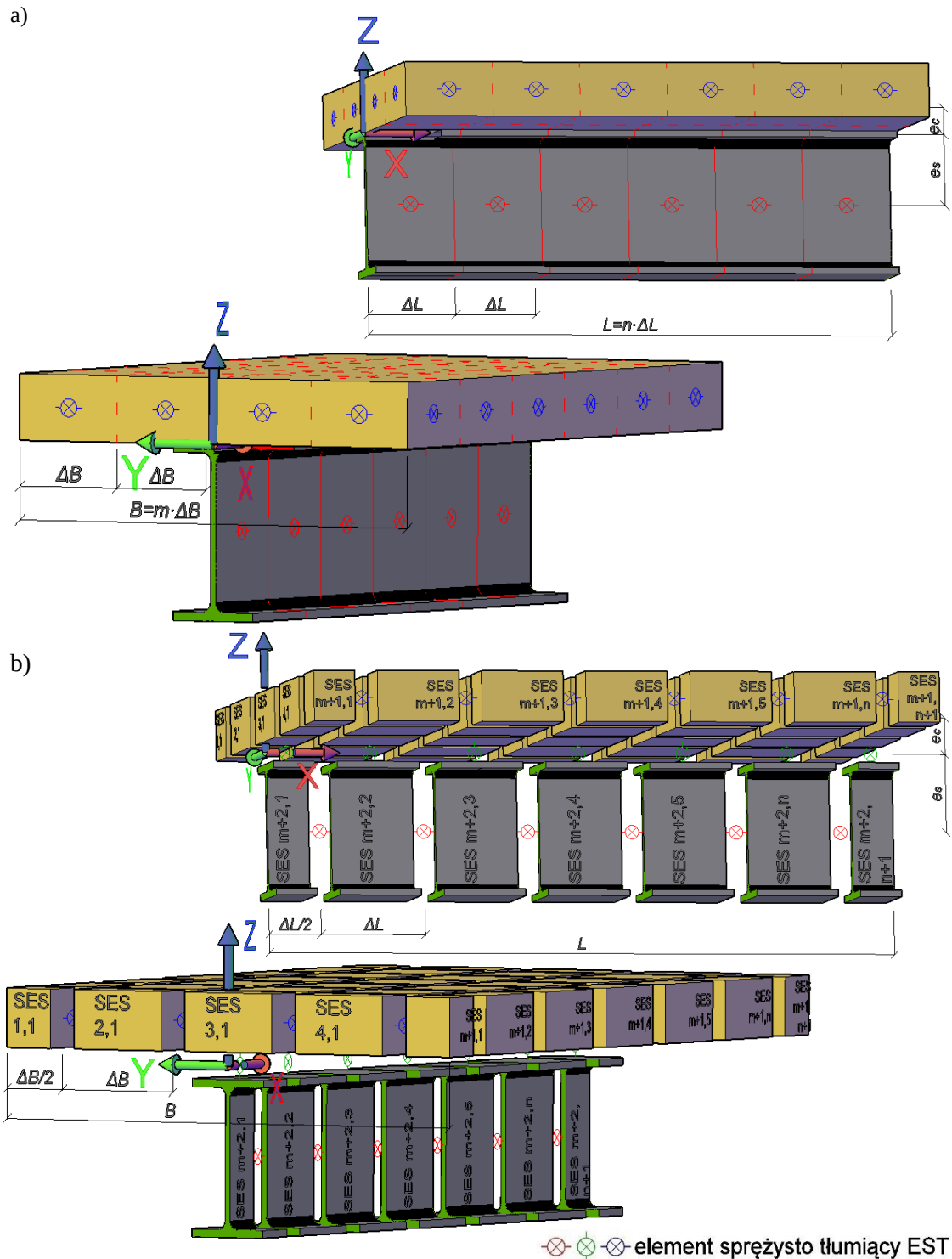
Dyskretny model obliczeniowy płyty, dwuteownika oraz belki zespolonej opracowano w konwencji metody Sztywnych Elementów Skończonych – model SES. Metoda ta polega na podziale rzeczywistego układu na nieodkształcalne bryły nazywane sztywnymi elementami skończonymi (SES), które połączone są między sobą elementami sprężysto - tłumiącymi (EST). SES-y charakteryzowane są poprzez masy oraz masowe momenty bezwładności, natomiast EST-y przez współczynniki sztywności i tłumienia. Budowę modelu rozpoczyna się od podziału obiektu na odcinki o równej lub zbliżonej długości. W ten sposób uzyskujemy podział pierwotny. Następnie w środku każdego odcinka umieszczamy EST, który skupia właściwości sprężyste i tłumiące danego elementu. W kolejnym kroku łączymy powstałe EST-y za pomocą SES-ów – to jest podział wtórny. Główne założenia metody SES zostały opracowane przez Kruszewskiego i innych [22, 23 i 52].

3.1. Model przestrzenny SES - założenia ogólne

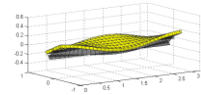
Tworząc model belki zespolonej za pomocą metody SES założono, że oddzielnie zostanie zamodelowana płyta żelbetowa i dwuteownik stalowy i następnie zostaną one połączone elementami sprężysto tłumiącymi modelującymi zespolenie. Na Rys. 3.1.a przedstawiono schematycznie belkę zespoloną o długości L podzieloną na n odcinków o długości ΔL na kierunku osi X . Dokonano również podziału na kierunku Y dla płyty żelbetowej o szerokości B na m odcinków o długości ΔB . W ten sposób dokonano podziału pierwotnego na dwóch kierunkach. Na kierunku osi Y nie dokonywano podziału dwuteownika stalowego. Do każdego odcinka powstałego w wyniku podziału pierwotnego przypisano EST: dla części stalowej każdy EST skupiał właściwości sprężysto-tłumiące dwuteownika stalowego $\otimes$, dla części żelbetowej skupiał właściwości sprężysto-tłumiące płyty żelbetowej $\otimes$ odpowiednio na kierunku X i Y . Pomiedzy



powstałe EST-y oddzielnie dla płyty żelbetowej i dwuteownika wstawiono sztywne elementy skończone SES o długości wynikającej z podziału wtórnego. Dla elementów skrajnych długość elementów wynosiła $\Delta L/2$ na kierunku osi X oraz $\Delta B/2$ na kierunku osi Y (dla płyty żelbetowej), zaś dla pozostałych odpowiednio ΔL i ΔB . Ostatnim elementem uzupełniającym model były EST-y modelujące zespolenie $\otimes$. Łączą one krawędzie SES-ów płyty żelbetowej i dwuteownika stalowego (Rys. 3.1.b).



Rys. 3.1 Model metody SES: a) podział belki na odcinki; b) podział belki na sztywne elementy skończone.



Każdy SES o numerze i posiada swój niezależny układ odniesienia $X_{SES}^{(i)}, Y_{SES}^{(i)}, Z_{SES}^{(i)}$. Układ ten dobiera się tak aby pokrywał się z centralnym układem bezwładności danego SES-u. Do scharakteryzowania danego SES-u są potrzebne masy oraz masowe momenty bezwładności, które zestawiane są w diagonalnej macierzy mas o postaci:

$$\mathbf{M}^{(i)} = \text{diag}[m^{(i)}, m^{(i)}, m^{(i)}, J_X^{(i)}, J_Y^{(i)}, J_Z^{(i)}] \quad (3.1)$$

Pierwsze trzy wyrazy macierzy równe są masie SES, pozostałe trzy są masowymi momentami bezwładności SES względem osi $X_{SES}^{(i)}, Y_{SES}^{(i)}, Z_{SES}^{(i)}$.

Podstawowymi parametrami opisującymi EST o numerze k są współczynniki opisujące jego właściwości sprężyste i tłumiące. Każdy EST posiada swój niezależny układ $X_{EST}^{(k)}, Y_{EST}^{(k)}, Z_{EST}^{(k)}$. Właściwości tłumiące mogą zostać pominięte w przypadku rozwiązywania zagadnienia drgań własnych konstrukcji. Właściwości sprężyste opisywane są za pomocą macierzy sztywności składających się z trzech współczynników sztywności translacyjnej $\mathbf{K}_{T,j}^{(k)}$ oraz trzech współczynników sztywności rotacyjnej $\mathbf{K}_{R,j}^{(k)}$. Macierze sztywności $\mathbf{K}^{(k)}$ przyjmuje postać macierzy diagonalnej o wymiarach 6x6.

$$\mathbf{K}^{(k)} = \text{diag}[k_{T,X}^{(k)}, k_{T,Y}^{(k)}, k_{T,Z}^{(k)}, k_{R,X}^{(k)}, k_{R,Y}^{(k)}, k_{R,Z}^{(k)}] \quad (3.2)$$

Właściwości tłumiące opisywane są za pomocą macierzy współczynników tłumienia $\mathbf{C}^{(k)}$, która składa się z trzech współczynników tłumienia translacyjnego $\mathbf{C}_{T,j}^{(k)}$ i z trzech współczynników tłumienia rotacyjnego $\mathbf{C}_{R,j}^{(k)}$. Macierze tłumienia przyjmuje postać macierzy diagonalnej o wymiarach 6x6.

$$\mathbf{C}^{(k)} = \text{diag}[c_{T,X}^{(k)}, c_{T,Y}^{(k)}, c_{T,Z}^{(k)}, c_{R,X}^{(k)}, c_{R,Y}^{(k)}, c_{R,Z}^{(k)}] \quad (3.3)$$

Związek pomiędzy odpowiadającymi sobie współczynnikami sztywności $k_{i,j}^{(k)}$ i tłumienia $c_{i,j}^{(k)}$ jest następujący:

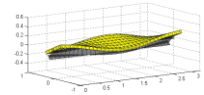
$$c_{i,j}^{(k)} = \frac{\eta}{\omega} k_{i,j}^{(k)} \quad i = T, R \quad j = X, Y, Z \quad (3.4)$$

gdzie:

η – współczynnik strat,

ω – częstotliwość drgań.

Położenie SES-a o numerze i w przestrzeni określa się za pomocą współrzędnych uogólnionych. Dla modeli przestrzennych, które posiadają sześć stopni swobody, położenie każdego SES-a określa sześć współrzędnych uogólnionych (przemieszczenia środków masy na kierunku osi $X_{SES}^{(i)}, Y_{SES}^{(i)}, Z_{SES}^{(i)}$ oraz obroty wokół tych osi mierzone



od położenia równowagi). Współrzędne uogólnione zapisuje się w formie wektorowej i przyjmuje ona postać:

$$\mathbf{q}^{(i)} = \text{col}(q_{T,X}^{(i)}, q_{T,Y}^{(i)}, q_{T,Z}^{(i)}, q_{R,X}^{(i)}, q_{R,Y}^{(i)}, q_{R,Z}^{(i)}) \quad (3.5)$$

Kolejnym etapem jest proces transformacji przemieszczeń, który ma na celu powiązanie energii potencjalnej odkształcenia EST od współrzędnych uogólnionych sztywnych elementów skończonych połączonych tym EST-em. W tym celu należy wyznaczyć zależność pomiędzy współrzędnymi uogólnionymi SES, a współrzędnymi zamocowania EST do danego sztywnego elementu skończonego. Należy pamiętać, że wektor przemieszczeń SES w punkcie zamocowania EST jest zapisany w układzie $X_{EST}^{(k)}, Y_{EST}^{(k)}, Z_{EST}^{(k)}$, a wektor współrzędnych uogólnionych w układzie $X_{SES}^{(i)}, Y_{SES}^{(i)}, Z_{SES}^{(i)}$. Jako pierwsze należy wyznaczyć współrzędne wektora przemieszczenia SES o numerze i do punktu zamocowania EST o numerze k . Pierwsze trzy wyrazy tego wektora to przemieszczenia translacyjne, a pozostałe trzy to przemieszczenia rotacyjne.

$$\bar{\mathbf{w}}^{(ik)} = \text{col}(\bar{w}_{T,X}^{(ik)}, \bar{w}_{T,Y}^{(ik)}, \bar{w}_{T,Z}^{(ik)}, \bar{w}_{R,X}^{(ik)}, \bar{w}_{R,Y}^{(ik)}, \bar{w}_{R,Z}^{(ik)}) \quad (3.6)$$

W zapisie ogólnym:

$$\bar{\mathbf{w}}^{(ik)} = \mathbf{S}^{(ik)} \cdot \mathbf{q}^{(i)} \quad (3.7)$$

gdzie:

$\mathbf{S}^{(ik)}$ – blok współrzędnych zamocowania EST o numerze k do SES o numerze i . Współrzędne zamocowania EST $s_X^{(ik)}, s_Y^{(ik)}, s_Z^{(ik)}$ opisane są w układzie odniesienia $X_{SES}^{(i)}, Y_{SES}^{(i)}, Z_{SES}^{(i)}$. Blok ten przyjmuje postać macierzy:

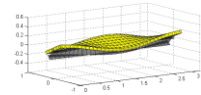
$$\mathbf{S}^{(ik)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & s_Z^{(ik)} & -s_Y^{(ik)} \\ 0 & 1 & 0 & -s_Z^{(ik)} & 0 & s_X^{(ik)} \\ 0 & 0 & 1 & s_Y^{(ik)} & -s_X^{(ik)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Wektor $\bar{\mathbf{w}}^{(ik)}$ opisany jest w układzie $X_{SES}^{(i)}, Y_{SES}^{(i)}, Z_{SES}^{(i)}$, w kolejnym kroku należy go przetransformować do układu $X_{EST}^{(k)}, Y_{EST}^{(k)}, Z_{EST}^{(k)}$ otrzymując wektor $\mathbf{w}^{(ik)}$. Transformacji dokonujemy za pomocą macierzy składającej się ze współczynników kierunkowych między osiami układu $X_{EST}^{(k)}, Y_{EST}^{(k)}, Z_{EST}^{(k)}$ i osiami układu $X_{SES}^{(i)}, Y_{SES}^{(i)}, Z_{SES}^{(i)}$. Zależność tę można zapisać jako:

$$\mathbf{w}^{(ik)} = \boldsymbol{\Theta}^{(ik)} \cdot \bar{\mathbf{w}}^{(ik)} \quad (3.9)$$

gdzie:

$\boldsymbol{\Theta}^{(ik)}$ – blok współczynników kierunkowych.



$$\Theta^{(ik)} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{X,X}^{(ik)} & \cos \varphi_{X,Y}^{(ik)} & \cos \varphi_{X,Z}^{(ik)} & & & \\ \cos \varphi_{Y,X}^{(ik)} & \cos \varphi_{Y,Y}^{(ik)} & \cos \varphi_{Y,Z}^{(ik)} & & 0 & \\ \cos \varphi_{Z,X}^{(ik)} & \cos \varphi_{Z,Y}^{(ik)} & \cos \varphi_{Z,Z}^{(ik)} & & & \\ & & 0 & \cos \varphi_{X,X}^{(ik)} & \cos \varphi_{X,Y}^{(ik)} & \cos \varphi_{X,Z}^{(ik)} \\ & & & \cos \varphi_{Y,X}^{(ik)} & \cos \varphi_{Y,Y}^{(ik)} & \cos \varphi_{Y,Z}^{(ik)} \\ & & & \cos \varphi_{Z,X}^{(ik)} & \cos \varphi_{Z,Y}^{(ik)} & \cos \varphi_{Z,Z}^{(ik)} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

gdzie:

$\varphi_{j,j}^{(ik)}$, $j = X, Y, Z$ – kąt zawarty pomiędzy osiami układu $X_{EST}^{(k)}, Y_{EST}^{(k)}, Z_{EST}^{(k)}$ i osiami układu $X_{SES}^{(i)}, Y_{SES}^{(i)}, Z_{SES}^{(i)}$.

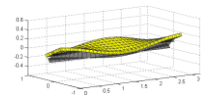
W opracowanym modelu przestrzennym osie układów $X_{EST}^{(k)}, Y_{EST}^{(k)}, Z_{EST}^{(k)}$ i $X_{SES}^{(i)}, Y_{SES}^{(i)}, Z_{SES}^{(i)}$ są do siebie równoległe.

Globalna macierz sztywności $\mathbf{K}$ powstaje na podstawie macierzy sztywności $\mathbf{K}^{(k)}$ dla pojedynczych EST, globalna macierz tłumienia $\mathbf{C}$ powstaje na podstawie macierzy tłumienia $\mathbf{C}^{(k)}$ dla pojedynczych EST-ów, a macierz bezwładności $\mathbf{M}$ na podstawie macierzy mas $\mathbf{M}^{(i)}$ dla pojedynczych SES-ów. Sposoby ich tworzenia zostały opisane szczegółowo w literaturze [22,23 i 52].

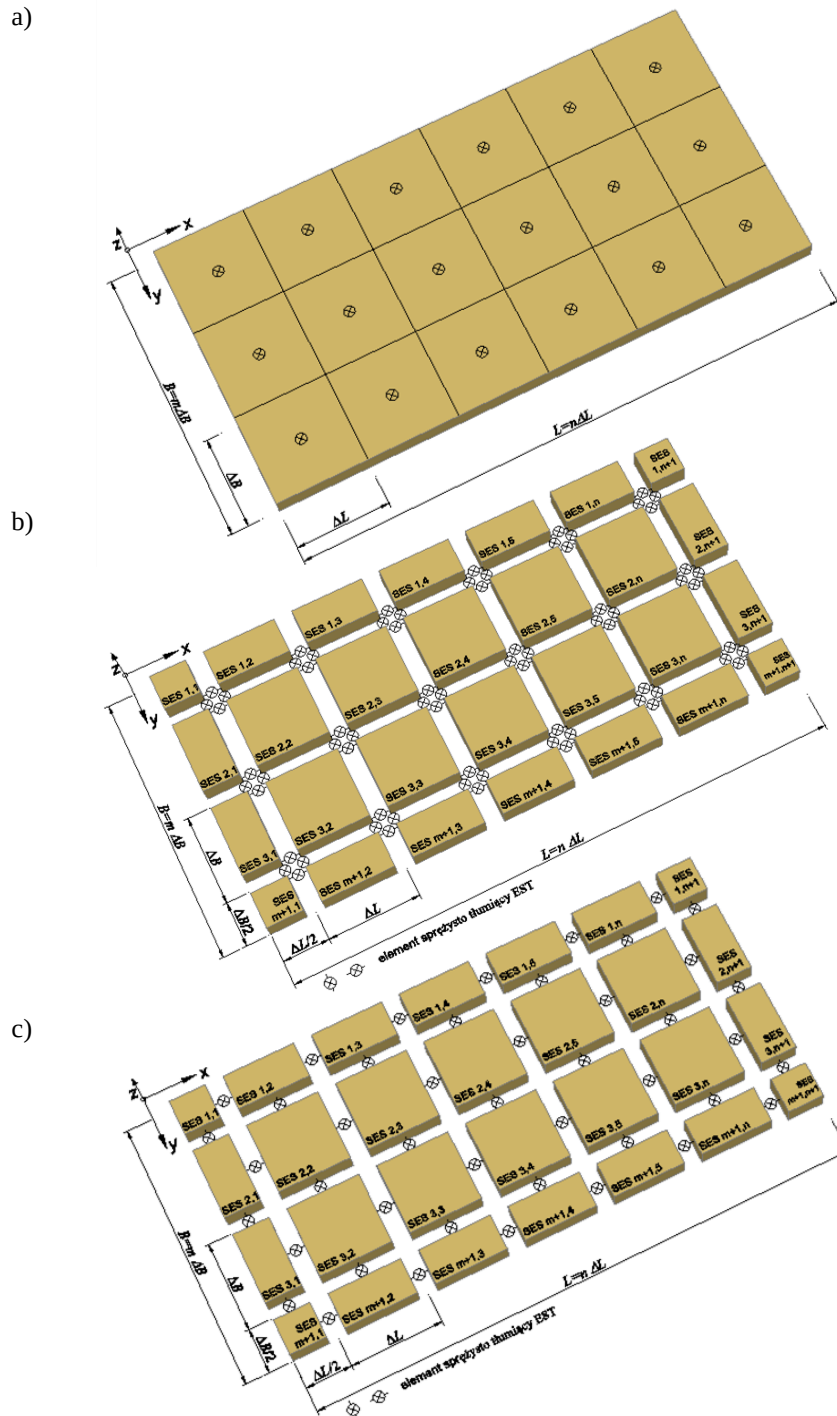
W następnych podrozdziałach przedstawiono szczegółowe informacje na temat zastosowanych technik modelowania poszczególnych elementów belki zespolonej to jest płyty żelbetowej, dwuteownika stalowego jak i elementów łączących je - kołków zespalających.

3.2. Model przestrzenny SES płyty

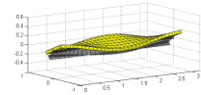
Modelowanie elementów ciągłych metodą SES zaczyna się od dokonania podziału pierwotnego. W przypadku płyty podział należy przeprowadzić w dwóch kierunkach to jest wzdłuż na ΔL odcinków i w poprzek na ΔB odcinków. Model dzielimy na odcinki o równej lub zbliżonej długości. Uzyskany przy tych założeniach podział pierwotny przedstawiono na (Rys. 3.2.a). Następnie w środku ciężkości każdego elementu powstałego w wyniku podziału, umieszcza się EST. Każdy EST rozbity zostaje na cztery mniejsze EST-y tak, aby możliwym było połączenie narożników czterech sąsiadujących ze sobą SES-ów, jest to podział wtórny. W każdym zestawie czterech EST, dwa są równoległe do osi głównej X , a dwa są równoległe do osi głównej Y . W klasycznym podejściu [22, 23] proponuje się, aby własności sprężyste elementów odwzorowywały EST-y położone jak na (Rys. 3.2.b), czyli w miejscu styku czterech narożników SES-ów. W podejściu tym do modelowania stosuje się elementy o trzech stopniach swobody. Elementy te ulegają przemieszczeniu na kierunku osi Z oraz obrotu względem osi X i Y . W klasycznym podejściu pomijana jest sztywność rotacyjna na kierunku osi Z . Przy takim modelowaniu nie uzyskiwano zgodności w zakresie częstotliwości drgań skrętnych. Po wnikliwej analizie ustalono, że niezgodność ta wynika ze sposobu rozmieszczenia



EST-ów. Zamocowanie ich w narożnikach blokuje swobodne skręcanie poszczególnych SES-ów względem osi X i Y . Jako modyfikację postanowiono rozsunąć EST-y tak aby łączyły one środki poszczególnych SES-ów, pokazano to na (Rys. 3.2.c). Podobne rozwiązanie zaprezentowano w pracy [3], jednak opracowany model opisywał elementy płyty za pomocą pięciu stopni swobody, a modyfikację położenia EST-ów uzasadniono chęcią ograniczenia obrotu segmentów względem osi prostopadłej do płaszczyzny elementu pierwotnego (obrót względem osi Z). Artykuł ten był inspiracją dla opracowanego modelu płyty.



Rys. 3.2 Model SES przestrzenny płyty: a) podział pierwotny; b) podział wtórny – klasyczne umiejscowienie EST; c) podział wtórny – zmodyfikowane umiejscowienie EST.



W podejściu zaproponowanym w tej pracy model płyty opisano za pomocą sześciu stopni swobody (trzy przemieszczenia translacyjne oraz trzy rotacyjne), gdyż będzie ona łączona z modelem kształtownika stalowego opisanego również, modelem o sześciu stopniach swobody. Zaproponowana modyfikacja wymagała wprowadzenia dodatkowego współczynnika sztywności rotacyjnej EST względem osi Z. Współczynnik ten określono traktując elementy płyty jako belki pryzmatyczne o przekroju prostokątnym.

Wartości współczynników bezwładności diagonalnej macierzy $\mathbf{M}^{(i)}$ dla SES-ów modelujących wewnętrzną część płyty wyznaczano następująco:

$$m^{(i)} = h_c \cdot \Delta L \cdot \Delta B \cdot \rho_c \quad (3.11)$$

gdzie:

h_c – grubość płyty żelbetowej,

$\rho_c^{(i)}$ – gęstość materiału płyty żelbetowej.

$$J_x^{(i)} = \frac{m^{(i)}}{12} (\Delta L^2 + h_c^2) \quad (3.12)$$

$$J_y^{(i)} = \frac{m^{(i)}}{12} (\Delta B^2 + h_c^2) \quad (3.13)$$

$$J_z^{(i)} = \frac{m^{(i)}}{12} (\Delta L^2 + \Delta B^2) \quad (3.14)$$

Dla każdego EST o numerze k przyjęto niezależny własny układ osi głównych $X_{EST}^{(k)}, Y_{EST}^{(k)}, Z_{EST}^{(k)}$. Główne osie EST charakteryzują się tym, że siły działające na EST na kierunku zgodnym z tymi osiami powodują jego odkształcenia translacyjne wyłącznie na kierunku działania tych sił.

Wartości współczynników sztywności translacyjnej oraz rotacyjnej ustalono według następujących zasad:

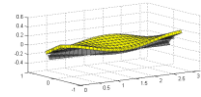
a) Dla EST-ów równoległych do osi głównej X

$$k_{T,X-X}^{(k)} = \frac{E_c \cdot h_c \cdot \Delta B}{\Delta L} \quad (3.15)$$

$$k_{T,Y-X}^{(k)} = \frac{G_c \cdot h_c \cdot \Delta B}{\Delta L \cdot \chi} \quad (3.16)$$

$$k_{T,Z-X}^{(k)} = \frac{G_c \cdot h_c \cdot \Delta B}{\Delta L \cdot \chi} \quad (3.17)$$

$$k_{R,X-X}^{(k)} = \frac{G_c \cdot h_c^3 \cdot \Delta B}{6 \cdot \Delta L} \quad (3.18)$$



$$k_{R,Y-X}^{(k)} = \frac{E_c \cdot h_c^3 \cdot \Delta B}{12 \cdot (1 - \nu_c^2) \cdot \Delta L} \quad (3.19)$$

$$k_{R,Z-X}^{(k)} = \frac{E_c \cdot h_c \cdot \Delta B^3}{12 \cdot \Delta L} \quad (3.20)$$

b) Dla EST-ów równoległych do osi głównej Y

$$k_{T,X-Y}^{(k)} = \frac{G_c \cdot h_c \cdot \Delta L}{\Delta B \cdot \chi} \quad (3.21)$$

$$k_{T,Y-Y}^{(k)} = \frac{E_c \cdot h_c \cdot \Delta L}{\Delta B} \quad (3.22)$$

$$k_{T,Z-Y}^{(k)} = \frac{G_c \cdot h_c \cdot \Delta L}{\Delta B \cdot \chi} \quad (3.23)$$

$$k_{R,X-Y}^{(k)} = \frac{E_c \cdot h_c^3 \cdot \Delta L}{12 \cdot (1 - \nu_c^2) \cdot \Delta B} \quad (3.24)$$

$$k_{R,Y-Y}^{(k)} = \frac{G_c \cdot h_c^3 \cdot \Delta L}{6 \cdot \Delta B} \quad (3.25)$$

$$k_{R,Z-Y}^{(k)} = \frac{E_c \cdot h_c \cdot \Delta L^3}{12 \cdot \Delta B} \quad (3.26)$$

gdzie:

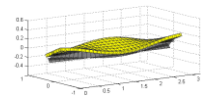
- E_c – dynamiczny zastępczy moduł sprężystości podłużnej dla komponentu płyty żelbetowej uwzględniający wpływ zbrojenia (dalej nazywany dynamicznym zastępczym modułem sprężystości podłużnej betonu),
- G_c – dynamiczny zastępczy moduł sprężystości poprzecznej płyty żelbetowej (uwzględniający wpływ zbrojenia),
- ν_c – liczba Poissona dla betonu,
- χ – współczynnik kształtu Timoshenki.

Współczynnik χ nazywany współczynnikiem ścinania Timoshenki, który pozwolił na uwzględnienie nierównomiernego rozkładu naprężeń stycznych obliczono według zależności podanej w [5, 16]:

$$\chi = \frac{A}{J_Y^2} \int_A \frac{S_Y^2(z)}{b^2(z)} dA \quad (3.27)$$

gdzie:

- A – pole przekroju,
- J_Y – moment bezwładności względem osi Y,
- $b(z)$ – szerokość przekroju względem osi Z,
- $S_Y(z)$ – moment statyczny części odciętej z pola przekroju względem osi Y.



Dla przekroju prostokątnego współczynnik kształtu Timoshenki przyjmuje wartość 1,2.

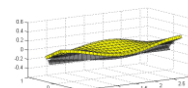
Wyniki uzyskane na podstawie zmodyfikowanego modelu SES postanowiono porównać z rozwiązaniem analitycznym (model teoretyczny – MT) oraz z modelem utworzonym w konwencji odkształcalnych elementów skończonych (MES). Model MES opracowano w programie Abaqus i w nim przeprowadzono obliczenia. Do obliczeń modelu MES przyjęto model przestrzenny. Płytę zamodelowano jako elementy sześciennie wykorzystując elementy drugiego rzędu o zredukowanym całkowaniu z funkcjami kształtu drugiego stopnia (oznaczenie C3D20R) o wymiarach 50x50. Analizę doboru elementów w programie Abaqus przedstawiono w artykułach [40, 57]. Rozwiązanie szczegółowe zostało opracowane i przedstawione w pracach [24, 26]. Praca [26] autora Leissa dotyczy rozwiązania płyt cienkich, a praca [24] autorów Liew, Xinag i Kitipornchai przedstawia rozwiązanie zagadnienia drgań własnych dla płyt prostokątnych umiarkowanie grubych. Autorzy zaprezentowali rozwiązania dla różnych warunków brzegowych (21 przypadków), dla zmieniających się proporcji boków a/b (długość/szerokość) oraz różnemu stosunkowi grubości płyty do szerokości h/b (grubość/szerokość). Rozwiązanie to bazuje na określeniu funkcji energii przy użyciu teorii płyt Mindlina z zastosowaniem procedury minimalizacji Rayleigha-Ritza, co umożliwia rozwiązanie zagadnienia własnego [47]. Zgodnie z teorią płyt umiarkowanie grubych przyjmuje się, że płyta taka ma grubość większą lub równą $1/10$ mniejszego z dwóch pozostałych wymiarów płyty. Dla płyty żelbetowej, dla której przeprowadzono badania oraz płyty żelbetowej użytej jako komponent belki zespolonej, stosunek ten wynosi $60/600$ (grubość/szerokość) czyli dokładnie $1/10$, dlatego też w obu przypadkach można stosować podczas modelowania teorię płyt umiarkowanie grubych. Porównanie wyników zdecydowano się przeprowadzić dla schematu płyty swobodnej (taki sam schemat przyjęto w badaniach doświadczalnych). W pracy [24] obliczenia analityczne zostały przeprowadzone dla płyty o różnych proporcjach boków, zdecydowano dla celów porównawczych przyjąć płytę o długości 1500 mm, szerokości 600 mm i grubości 60 mm, w ten sposób uzyskano proporcję 2,5 długości do szerokości boków oraz 0,1 stosunek grubości do szerokości. Liczbę Poissona przyjęto równą 0,3, moduł Younga E_c wynosi $3,0 \cdot 10^{10}$ N/m², a masę właściwą ρ_c równą 2400 kg/m³. W opracowaniu [24] wyniki przedstawiono w postaci bezwymiarowej:

$$\lambda = \frac{\omega \cdot b^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho_c \cdot h_c}{D}} \quad (3.28)$$

gdzie:

- ω – częstość kołowa drgań własnych,
- b – długość krótszej krawędzi płyty - szerokości,
- D – sztywność płyty na zginanie.

$$D = \frac{E_c \cdot h_c^3}{12 \cdot (1 - \nu_c^2)} \quad (3.29)$$



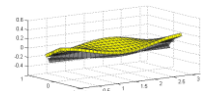
Wyniki dla przeprowadzonych analiz zestawiono w tabeli 3.1. Obliczenia dla modelu SES przeprowadzono z podziałem pierwotnym na 30 x 12 elementów, wymiary płyty przyjęto jak powyżej. Tabela zawiera porównanie rozwiązań trzech modeli: modelu teoretycznego według rozwiązania ścisłego – MT, modelu sztywnych elementów skończonych – SES oraz modelu elementów skończonych – MES. Za pomocą wartości Δ_{i_MT} oraz Δ_{i_MES} opisanymi zależnościami (3.30), przedstawiono różnicę procentową dla bezwymiarowych wartości częstotliwości drgań płyty, którą uzyskano pomiędzy modelem SES i odpowiednio modelem MT, i modelem MES. W pierwszej kolumnie przedstawiono uzyskane formy postaci drgań płyty dla danych bezwymiarowych wartościami częstotliwości drgań płyty.

$$\Delta_{i_MT} = \frac{\lambda_{i_MT} - \lambda_{i_SES}}{\lambda_{i_SES}} \quad \Delta_{i_MES} = \frac{\lambda_{i_MES} - \lambda_{i_SES}}{\lambda_{i_SES}} \quad (3.30)$$

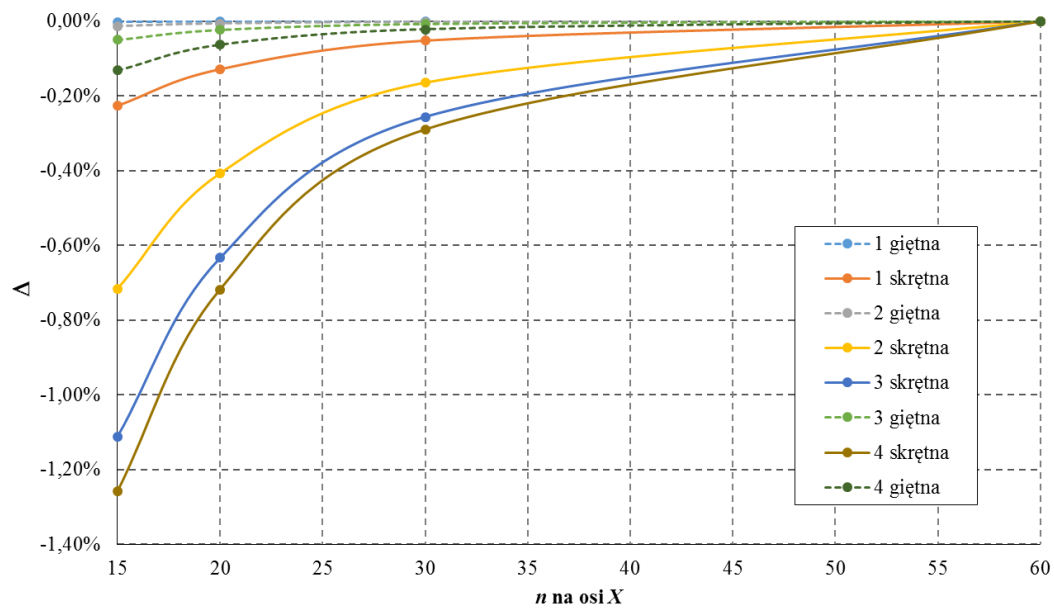
Tabela 3.1 Zestawienie bezwymiarowej częstotliwości drgań płyty dla modeli SES, MT i MES

PŁYTA ŻELBETOWA 60x600x1500 mm						
i	postać drgań płyty	SES	MT		MES	
		λ_{i_SES}	λ_{i_MT}	Δ_{i_MT}	λ_{i_MES}	Δ_{i_MES}
1		0,3605	0,3455	-4%	0,3457	-4%
2		0,5144	0,5137	0%	0,5154	0%
3		0,9826	0,9486	-3%	0,9502	-3%
4		1,0939	1,0952	0%	1,0994	1%
5		1,8080	1,8109	0%	1,8199	1%
6		1,8952	1,8220	-4%	1,8282	-4%
7		2,1860	2,1919	0%	2,4518	12%
8		2,3884	2,3566	-1%	2,1981	-8%
9		2,7164	2,7173	0%	2,3654	-13%
10		2,9329	2,9642	1%	2,7332	-7%

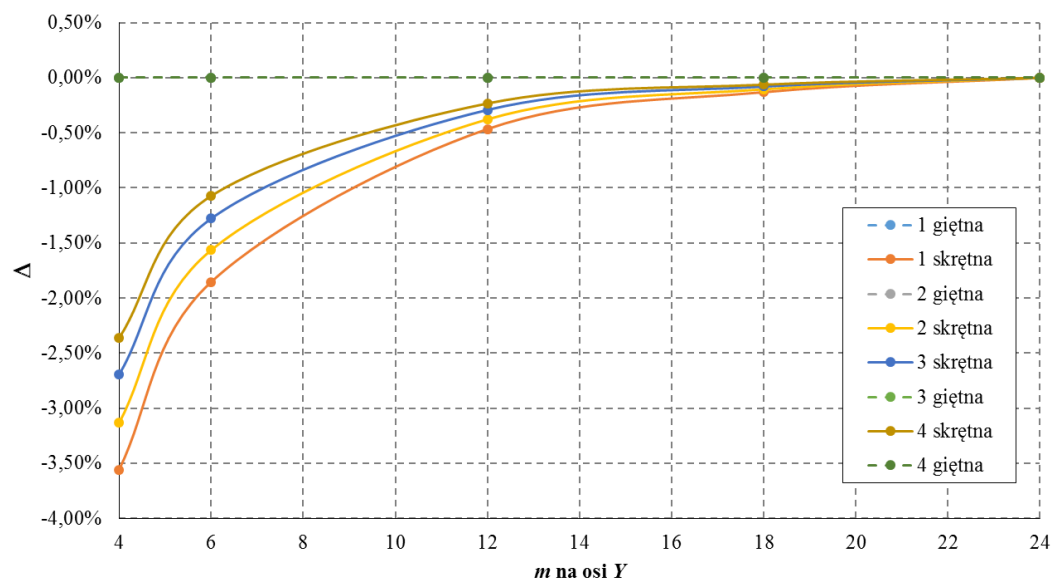
Uzyskano bardzo dobrą zbieżność wyników modelu SES płyty z modelem MT. Największa różnica wynosi 4%. Przy porównaniu wyników dla modelu MES z modelem SES widać większe rozbieżności dla wyższych częstotliwości drgań własnych (13% dla 9 postaci drgań własnych). Jednak porównując postaci drgań skrętnych (2, 4, 5 i 10) i giętnych (1, 3 i 6), które są uwzględniane w dalszym procesie estymacji parametrów modeli belek zespolonych, zbieżność wyników uzyskano dość dobrą dla jednych jak i drugich form drgań.



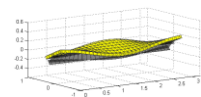
Dodatkowej analizie poddano również gęstość podziału płyty na kierunku osi X i Y . Przeprowadzono ją dla płyty żelbetowej o wymiarach i właściwościach jak powyżej. Wyniki dla różnych podziałów porównano z wynikami otrzymanymi przy podziale płyty na dostatecznie dużą liczbę odcinków to znaczy taką powyżej której dalsze zwiększanie gęstości podziału nie przynosiło znaczących zmian w otrzymywanych częstotliwościach drgań własnych. Na kierunku osi X była to wartość 60, a na kierunku osi Y wartość 24 (Rys. 3.3 i Rys. 3.4). Podczas analizy zmiany wartości parametru Δ dla różnego podziału na kierunku osi X dla płyty żelbetowej, dla osi Y przyjmowano stałą wartość podziału równą 12. W drugim przypadku przy zmianie podziału na kierunku osi Y , na kierunku osi X przyjęto stałą wartość równą 30. Sprawdzono, że dla innych wartości stałych zarówno na osi X jak i osi Y uzyskiwano takie same rezultaty.



Rys. 3.3 Dokładność obliczeń częstości drgań własnych płyty żelbetowej w zależności od gęstości podziału pierwotnego na kierunku osi X .



Rys. 3.4 Dokładność obliczeń częstości drgań własnych płyty żelbetowej w zależności od gęstości podziału pierwotnego na kierunku osi Y .

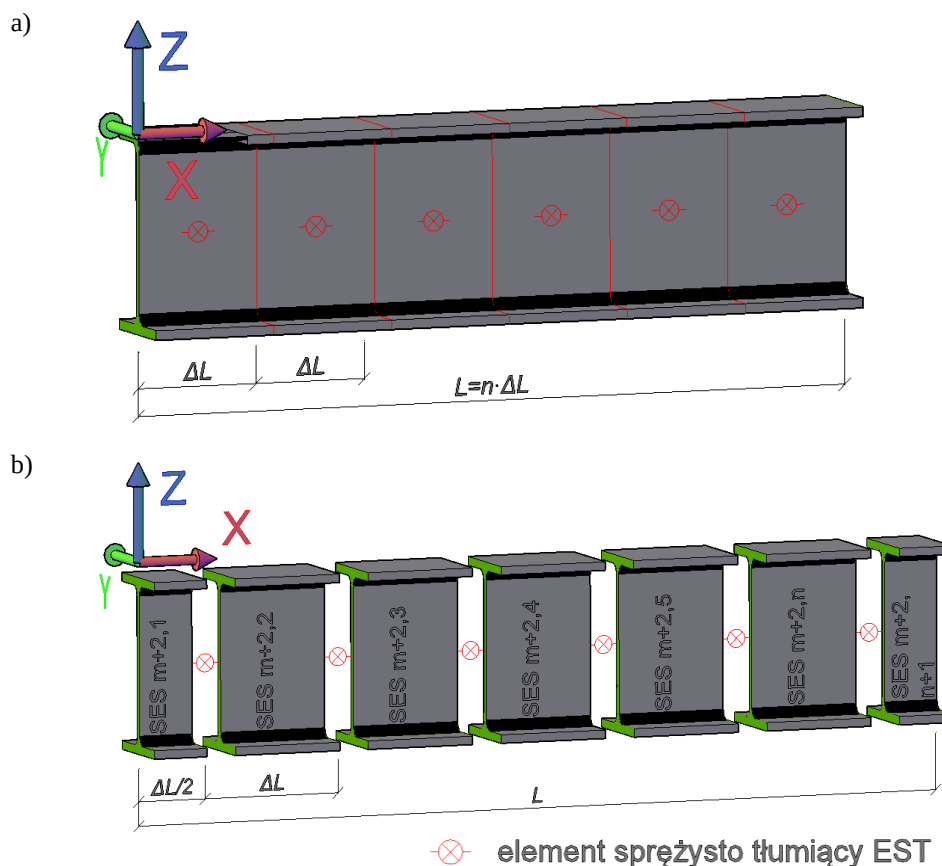


Stwierdzono, że wraz ze wzrostem gęstości podziału wartości częstotliwości drgań własnych zbliżają się asymptotycznie do rozwiązania dla płyty przy podziale na dostatecznie dużą liczbę odcinków, a rozwiązanie to dawało bardzo dobrą zgodność z rozwiązaniem analitycznym (patrz tabela 3.1). Jednak przy doborze podziału duże znaczenie miał fakt, że gęstszy podział wydłuża znacząco czas obliczeń.

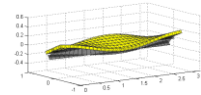
Analizując wykresy zauważono, że wzrost podziału ma wpływ na wartości częstotliwości drgań skrętnych, dla częstotliwości drgań giętych odnotowano nieznaczne zmiany poniżej 0,3%. Zdecydowano że zmiany nie przekraczające 2% są akceptowalne. Postanowiono przyjąć podział płyty na kierunku osi X powyżej 20 odcinków, a na kierunku osi Y powyżej 6.

3.3. Model przestrzenny SES kształtownika stalowego

Dyskretny model kształtownika stalowego opracowano zgodnie z metodą sztywnych elementów skończonych. Kształtownik stalowy podzielono w klasyczny sposób na n odcinków wzdłuż długości jedynie na kierunku osi X . Zastosowano podejście klasyczne, które jest opisane w literaturze. Podział dwuteownika przedstawiono na (Rys. 3.5.a) tak zwany podział pierwotny i na (Rys. 3.5.b) podział wtórny. W podejściu tym kolejne sztywne elementy skończone łączone są ze sobą za pomocą pojedynczego elementu sprężysto tłumiącego, umieszczonego w środku ciężkości, skupiającego właściwości sprężysto tłumiące kształtownika stalowego.



Rys. 3.5 Model SES przestrzenny IPE: a) podział pierwotny; b) podział wtórny – klasyczne umiejscowienie EST.



Wartości współczynników bezwładności diagonalnej macierzy $\mathbf{M}^{(i)}$ dla SES-ów modelujących wewnętrzną część kształtownika wyznaczano następująco:

$$m^{(i)} = A_s \cdot \Delta L \cdot \rho_s \quad (3.31)$$

gdzie:

A_s – pole powierzchni kształtownika stalowego,

ρ_s – gęstość masy materiału SES – gęstość stali.

$$J_x^{(i)} = \frac{(J_{Ys} + J_{Zs})}{A_s} \cdot m^{(i)} \quad (3.32)$$

$$J_Y^{(i)} = \left(\frac{\Delta L^2}{12} + \frac{J_{Ys}}{A_s} \right) \cdot m^{(i)} \quad (3.33)$$

$$J_Z^{(i)} = \left(\frac{\Delta L^2}{12} + \frac{J_{Zs}}{A_s} \right) \cdot m^{(i)} \quad (3.34)$$

gdzie:

J_{Ys} – moment bezwładności przy zginaniu względem osi Y kształtownika stalowego,

J_{Zs} – moment bezwładności przy zginaniu względem osi Z kształtownika stalowego.

Wartości współczynników sztywności translacyjnej oraz rotacyjnej dla poszczególnych EST-ów ustalono według następujących zasad:

$$k_{T,X}^{(k)} = \frac{E_s \cdot A_s}{\Delta L} \quad (3.35)$$

$$k_{T,Y}^{(k)} = \frac{G_s \cdot A_s}{\Delta L \cdot \chi_Y} \quad (3.36)$$

$$k_{T,Z}^{(k)} = \frac{G_s \cdot A_s}{\Delta L \cdot \chi_Z} \quad (3.37)$$

$$k_{R,X}^{(k)} = \frac{G_s \cdot J_{Ts}}{\Delta L} \quad (3.38)$$

$$k_{R,Y}^{(k)} = \frac{E_s \cdot J_{Ys}}{\Delta L} \quad (3.39)$$

$$k_{R,Z}^{(k)} = \frac{E_s \cdot J_{Zs}}{\Delta L} \quad (3.40)$$

gdzie:

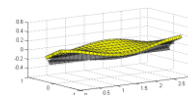
E_s – moduł sprężystości podłużnej dla stali,

G_s – moduł sprężystości poprzecznej dla stali,

J_{Ts} – wskaźnik sztywności przekroju na skręcanie dla kształtownika stalowego,

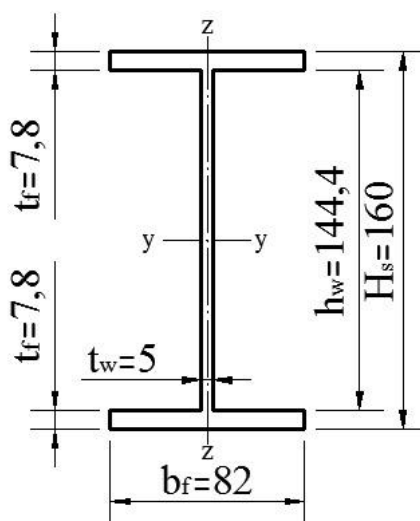
χ_Y – współczynnik kształtu przekroju Timoshenki przy ścinaniu wzdłuż osi Y,

χ_Z – współczynnik kształtu przekroju Timoshenki przy ścinaniu wzdłuż osi Z.



Dla kształtownika stalowego IPE 160 współczynnik kształtu Timoshenki wyznaczony z zależności (3.27) przy ścinaniu względem osi Y (χ_Y) wynosi 1,63, a przy ścinaniu względem osi Z (χ_Z) 2,49.

Po zdefiniowaniu modelu oraz wyznaczeniu częstotliwości postanowiono je porównać z wynikami otrzymanymi na podstawie analizy MES. Porównanie to przeprowadzono dla kształtownika stalowego o przekroju dwuteowym o wymiarach jak na rysunku (Rys. 3.6) i długości 3240 mm. Przyjęcie takiego przekroju podczas weryfikacji dokładności obliczeń modelu SES w porównaniu z modelem MES pozwoliło na dokładniejsze odwzorowanie takiego samego przekroju. Liczbę Poissona przyjęto równą 0,3, moduł Younga E_s wynosi $2,1 \cdot 10^{10}$ N/m², a masę właściwą dla stali ρ_s równą 7850 kg/m³.



Rys. 3.6 Przekrój kształtownika stalowego dwuteowego – przyjęty w porównaniu modelu SES do modelu MES

Model MES zaimplementowano jak poprzednio w programie Abaqus. Do obliczeń przyjęto model belki z wykorzystaniem elementów jednowymiarowych używając elementów dwuwęzłowych B31. Uwzględnia on możliwość odkształceń postaciowych belki (uwzględniając teorię belki Timoshenki). Taki sposób rozwiązania został zaproponowany przez A. Nowaka w pracy [36]. Porównanie zestawiono w tabeli 3.2.

Nie starano się porównywać wyniku obliczeń dla metody sztywnych elementów skończonych z rozwiązaniem analitycznym, gdyż porównanie takie jest prezentowane w pracy [22, 23]. Za pomocą wartości $\Delta_{i_MES_I}$ opisanej zależnością (3.41), przedstawiono różnicę procentową dla wartości częstotliwości drgań kształtownika, które uzyskano na podstawie modelu SES i modelu MES.

$$\Delta_{i_MES_I} = \frac{f_{i_MES} - f_{i_SES}}{f_{i_SES}} \quad (3.41)$$

gdzie:

f_i – i -ta wartość częstotliwości drgań własnych.

Uzyskano bardzo dobrą zbieżność wyników modelu SES dla IPE 160 z modelem MES. Największa różnica wynosi poniżej 2%.

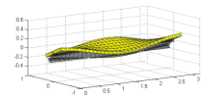
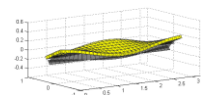
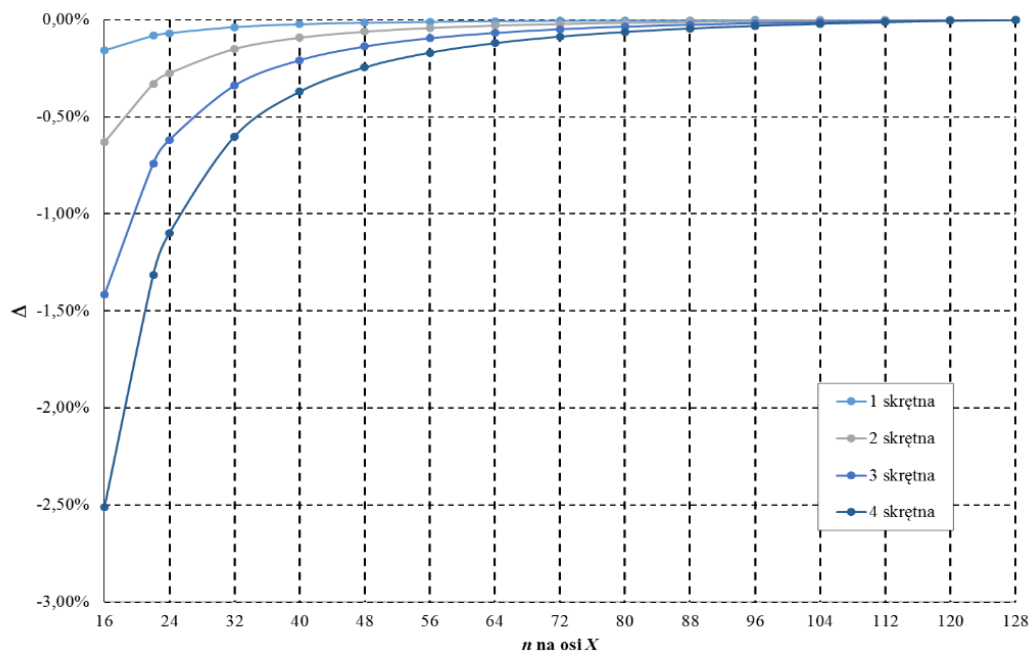


Tabela 3.2 Zestawienie częstotliwości drgań IPE 160 dla modeli SES i MES

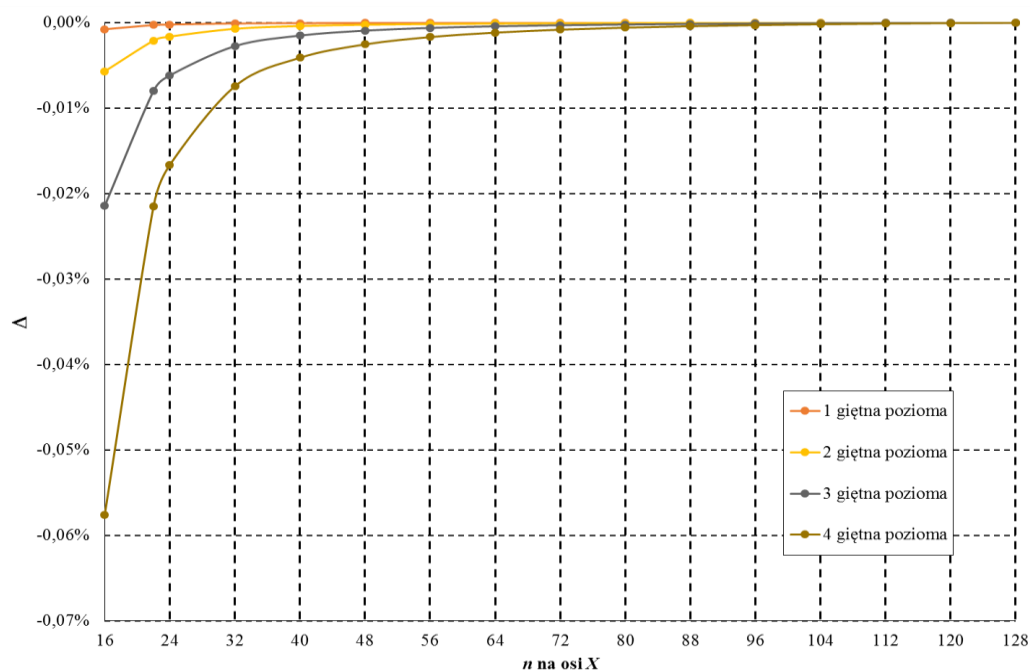
KSZTAŁTOWNIK I L=3240 mm				
postać drgań kształtownika I		SES	MES	
		f_{i_SES} [Hz]	f_{i_MES} [Hz]	$\Delta_{i_MES_I}$
1 skrętna		28,88	29,06	0,61%
1 giętna pozioma		33,18	33,13	-0,17%
2 skrętna		57,76	58,11	0,61%
3 skrętna		86,63	87,15	0,60%
2 giętna pozioma		91,15	90,89	-0,28%
1 giętna pionowa		112,55	112,56	0,01%
4 skrętna		115,48	116,17	0,60%
3 giętna pozioma		177,79	176,98	-0,46%
4 giętna pozioma		291,93	289,97	-0,67%
2 giętna pionowa		294,96	295,89	0,32%
3 giętna pionowa		541,17	544,95	0,70%
1 osiowa		798,16	798,15	0,00%
4 giętna pionowa		828,95	838,07	1,10%



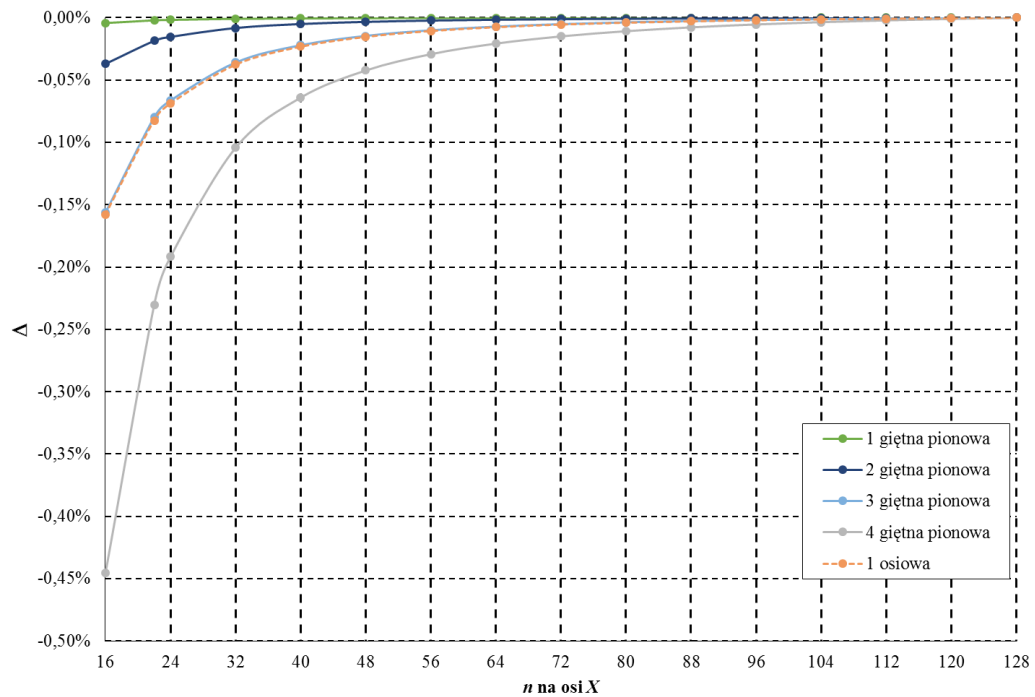
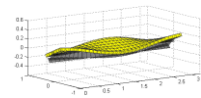
Tak jak dla płyty żelbetowej, dla kształtownika stalowego również przeprowadzono analizę gęstości podziału na kierunku osi X . Przeprowadzono ją dla kształtownika stalowego IPE 160 o długości 3240 mm i właściwościach jak powyżej. Wyniki dla różnych podziałów porównano z wynikami otrzymanymi przy podziale kształtownika na dostatecznie dużą liczbę odcinków i na kierunku osi X przyjęto wartość 128. Zaobserwowano, że wraz ze wzrostem gęstości podziału wartości częstotliwości drgań własnych zbliżają się do rozwiązania analitycznego (Rys. 3.7, Rys. 3.8 i Rys. 3.9).



Rys. 3.7 Dokładność obliczeń częstości drgań własnych skrętnych dla kształtownika stalowego w zależności od gęstości podziału pierwotnego na kierunku osi X .

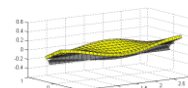


Rys. 3.8 Dokładność obliczeń częstości drgań własnych giętnych poziomych dla kształtownika stalowego w zależności od gęstości podziału pierwotnego na kierunku osi X .



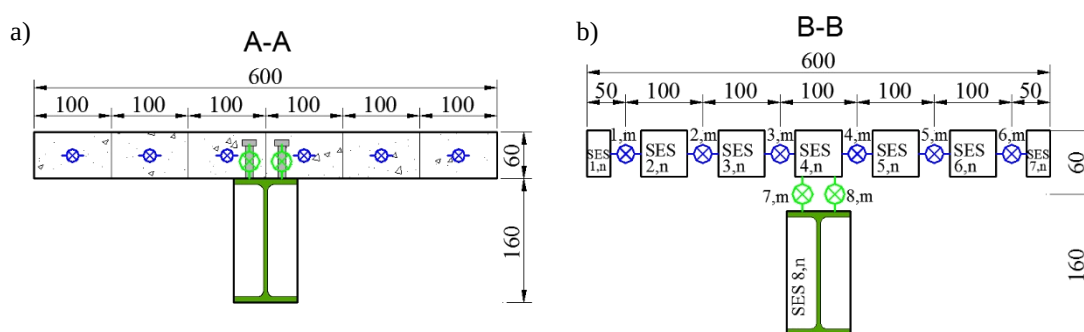
Rys. 3.9 Dokładność obliczeń częstości drgań własnych giętnych pionowych i osiowej dla kształtownika stalowego w zależności od gęstości podziału pierwotnego na kierunku osi X.

Stwierdzono, że wzrost podziału ma głównie wpływ na wartości częstotliwości drgań skrętnych. Przy podziale na 16 odcinków (podział pierwotny) zmiany te wynoszą około 2,5%, ale już przy podziale powyżej 20 odcinków błąd ten spada poniżej 1,5%, a przy podziale powyżej 32 odcinków poniżej 1%. Na wartości obliczanych częstotliwości drgań giętnych poziomych wzrost podziału ma nieznaczny wpływ poniżej 0,1%. Podobnie jest z wartościami drgań własnych giętnych pionowych i osiowej, gdzie przy podziale na 16 odcinków różnica w wynikach wynosi poniżej 0,5%. Zdecydowano że zmiany nie przekraczające 1,5% są akceptowalne. Postanowiono przyjąć podział kształtownika na kierunku osi X powyżej 20 odcinków.



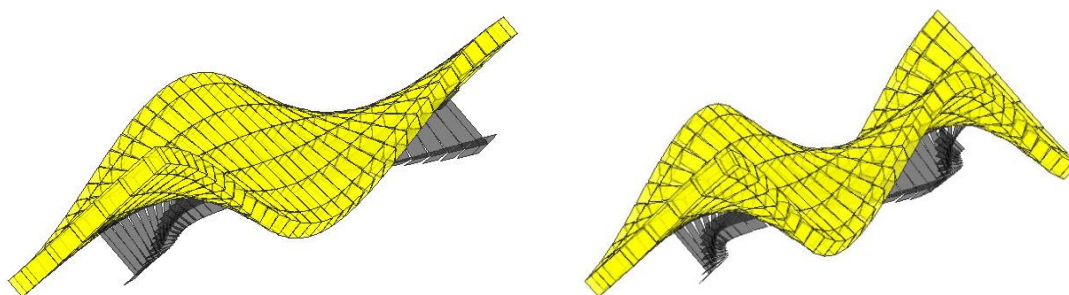
3.4. Model przestrzenny SES belki zespolonej

W ostatnim etapie zamodelowano połączenie, (miejsce styku) płyty żelbetowej z dwuteownikiem stalowym. Przy modelowaniu belki zespolonej podział pierwotny na kierunku poprzecznym płyty został dokonany na parzystą liczbę odcinków. Taki podział zawsze daje w podziale wtórnym nieparzystą liczbę sztywnych elementów skończonych w poprzek płyty, co powodowało zlokalizowanie środkowego elementu sztywnego bezpośrednio nad sztywnym elementem modelującym kształtownik stalowy. Przykładowy podział na 7 elementów na kierunku poprzecznym (podział wtórny) przedstawiono na Rys. 3.10. W początkowym podejściu modelowania zespolenia dwa elementy sprężysto tłumiące umiejscowiono w punktach zamocowania kołków zespalających (*wariant I* - Rys. 3.10).



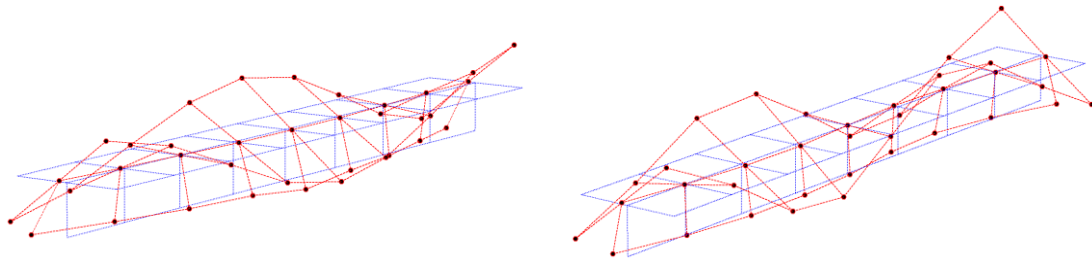
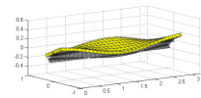
Rys. 3.10 Model SES przestrzenny modelowanie zespolenia – wariant I: a) podział pierwotny przekrój A-A; b) podział wtórny przekrój B-B

W trakcie prób odwzorowania postaci drgań skrętnych za pomocą tak ustalonego modelu połączenia (*wariant I*) uzyskano ruch płyty żelbetowej i dwuteownika stalowego, podczas skręcania, pod kątem prostym względem siebie. Komponenty belki doznawały obrotu w tym samym kierunku. Formy drgań uzyskane dla belki zespolonej z brakiem podatności na obrót przedstawiono na Rys. 3.11.



Rys. 3.11 Drgania skrętne modelu SES belki zespolonej C1 z zastosowaniem modelu zespolenia – wariant I

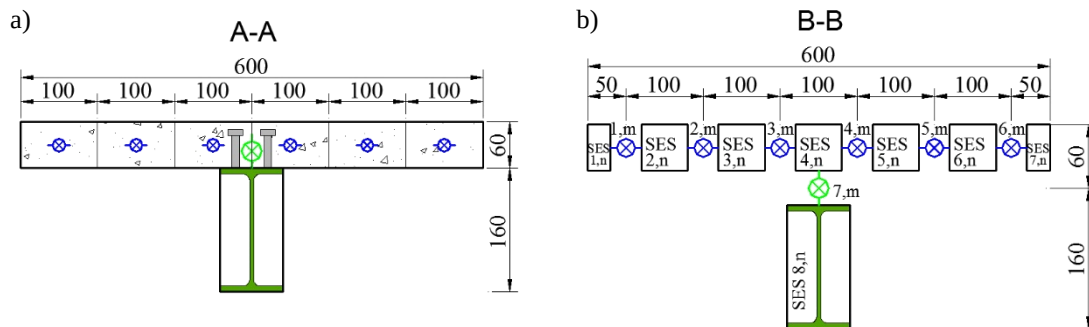
Dla porównania na Rys. 3.12 przedstawiono te same formy drgań uzyskane na podstawie badań doświadczalnych. Analiza postaci drgań określonych podczas badań wykazała inny rodzaj wzajemnego zachowania się części stalowej względem płyty żelbetowej podczas drgań skrętnych.



Rys. 3.12 Drgania skrętne belki zespolonej C1 uzyskane podczas badań doświadczalnych

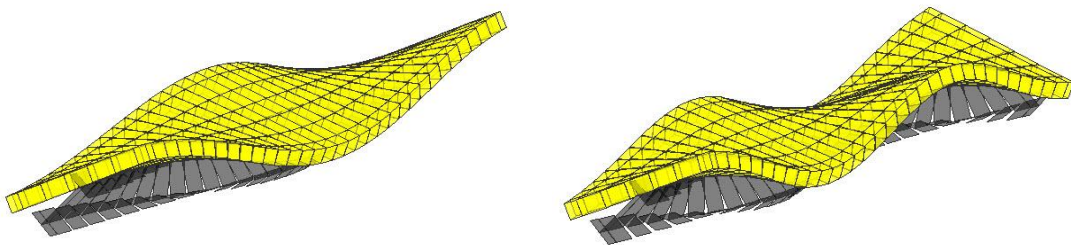
Porównując uzyskane formy drgań skrętnych dla modelu belki C1 z tymi uzyskanymi na podstawie badań doświadczalnych dla belki C1, zaobserwowano że proponowany model zespolenia (*wariant I*) nie pozwala na odwzorowanie rzeczywistego ruchu belki zespolonej.

Po analizie styku połączenia kształtownika z płytą żelbetową zdecydowano się zamodelować fragment połączenia jako pojedynczy element sprężysto tłumiący (*wariant II* - Rys. 3.13). Wartości definiujące pojedynczy element sprężysto tłumiący uwzględniały następujące elementy: kołki stalowe, fragment płyty żelbetowej oraz styk płyta żelbetowa - kształtownik stalowy.



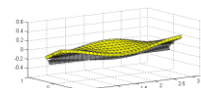
Rys. 3.13 Model SES przestrzenny modelowanie zespolenia – wariant II: a) podział pierwotny przekrój A-A; b) podział wtórny przekrój B-B

Po wprowadzeniu tych modyfikacji w modelowaniu zespolenia uzyskano analogiczne formy postaci drgań w modelu SES jak podczas badań doświadczalnych (Rys. 3.14).



Rys. 3.14 Drgania skrętne modelu SES belki zespolonej C1 z zastosowaniem zmodyfikowanego modelu zespolenia – wariant II

Zatem na odwzorowanie postaci drgań własnych stalowo-betonowej belki decydujący wpływ ma sztywność elementu zespalającego. Sztywność elementu zespalającego określono za pomocą: sztywności osiowej na kierunku osi Z i oznaczono



współczynnikiem K_v , sztywność na ścinanie na kierunku osi X i Y oznaczonej współczynnikiem K_h . Określenie „sztywność osiowa” rozumiana jest jako kierunek obciążenia kołków stalowych – jest to kierunek pionowy (kołki obciążane są wzdłuż swojej osi). Używając oznaczenia „sztywność na ścinanie” jest to rozumiane jako sztywność elementu zespalającego zapobiegająca poślizgom na styku stal-beton. Sztywność ta działa na kierunku stycznym do płaszczyzny zespolenia. Zdecydowano się na przyjęcie tej samej wartości sztywności na ścinanie na obydwu kierunkach równoległych do płaszczyzny styku zespolenia. Ze względu na przyjęty sposób modelowania połączenia jako pojedynczy EST w metodzie SES (*wariant II*, Rys. 3.13), koniecznym było zdefiniowanie dodatkowego parametru w postaci sztywności rotacyjnej względem osi X , którą oznaczono jako $K_{R,X}$. Taki pojedynczy EST uwzględnia sztywność kołka (osiową i na ścinanie), sztywność styku połączenia płyty żelbetowej z kształtownikiem na długości łączonych SES-ów i współpracy kołka z betonem.

Macierze sztywności $\mathbf{K}_{ZESP}$ przyjmuje postać macierzy diagonalnej o wymiarach 6×6 .

$$\mathbf{K}_{ZESP} = \text{diag}[K_h, K_h, K_v, K_{R,X}, 0, 0] \quad (3.42)$$

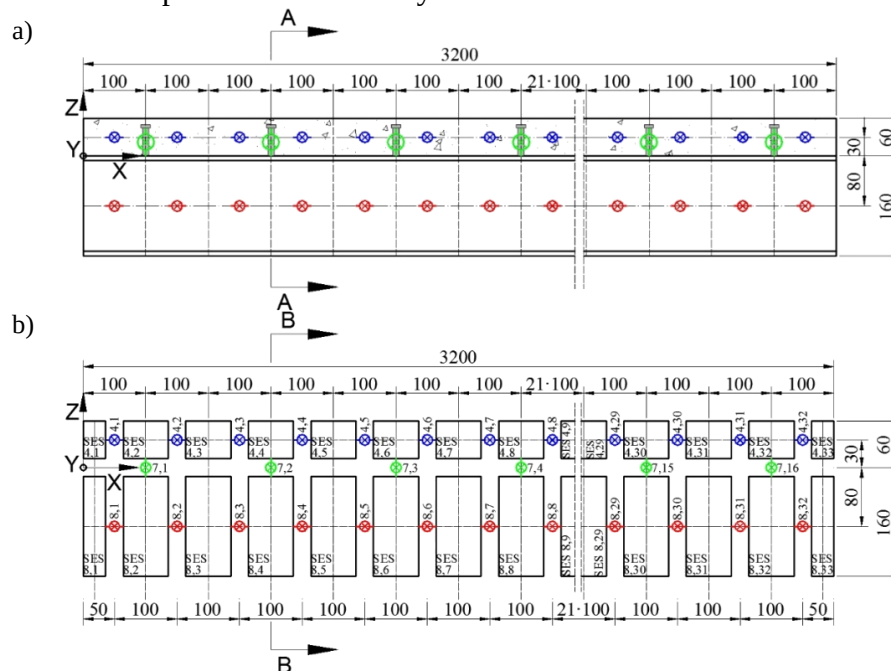
gdzie:

K_h – sztywność zastępcza pojedynczego EST na kierunku osi X i Y ,

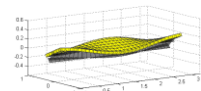
K_v – sztywność osiowa zastępcza pojedynczego EST na kierunku osi Z ,

$K_{R,X}$ – sztywność rotacyjna zastępcza pojedynczego EST względem osi X .

W celu ustalenia gęstości podziału płyty na elementy skończone przeprowadzono eksperymenty numeryczne, które miały na celu określenie niezbędnej liczby elementów. Ustalając gęstość podziału brano pod uwagę dokładność rozwiązania, czas obliczeń oraz położenie elementów zespalających – stalowych kołków. Podział pierwotny oraz wtórny dla belki C1 przedstawiono na Rys. 3.15.

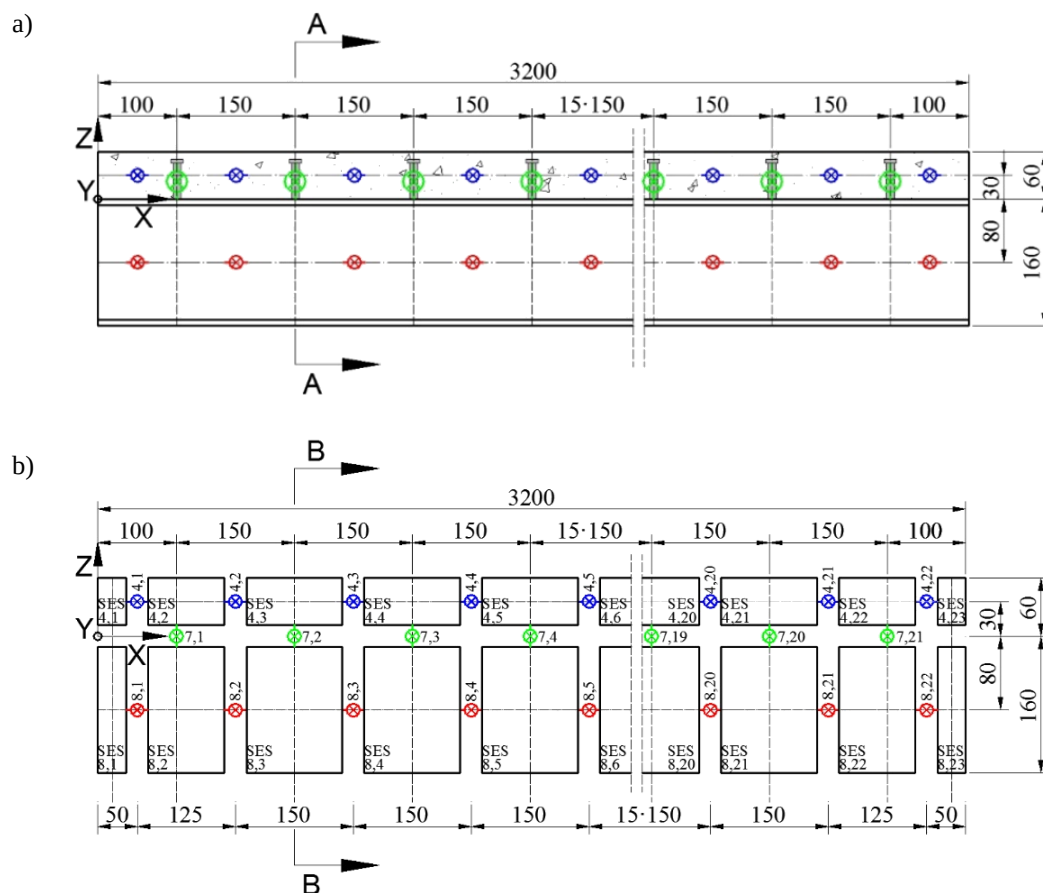


Rys. 3.15 Model SES przestrzenny belka C1 - widok w osi belki: a) podział pierwotny; b) podział wtórny.

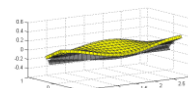


Podziału dokonano w następujący sposób, dla belki C1 płytę i kształtownik stalowy na kierunku osi X podzielono na 32 odcinki po 100 mm. W wyniku uzyskano model składający się z 33 SES-ów modelujących kształtownik stalowy, 33x7 SES-ów modelujących płytę żelbetową oraz z 16 EST-ów modelujących zespolenie (rozstaw kołków co 200 mm wymuszał wprowadzenie EST-ów co drugi SES) oraz 32 EST-y modelujących połączenie SES-ów kształtownika stalowego oraz dla płyty żelbetowej 32x7 EST-ów na kierunku osi X i 33x6 EST-ów na kierunku osi Y (łącznie 422 EST-y). Zestawienie otrzymanych EST-ów i SES-ów po podziale wtórnym przedstawiono w tabeli 3.3.

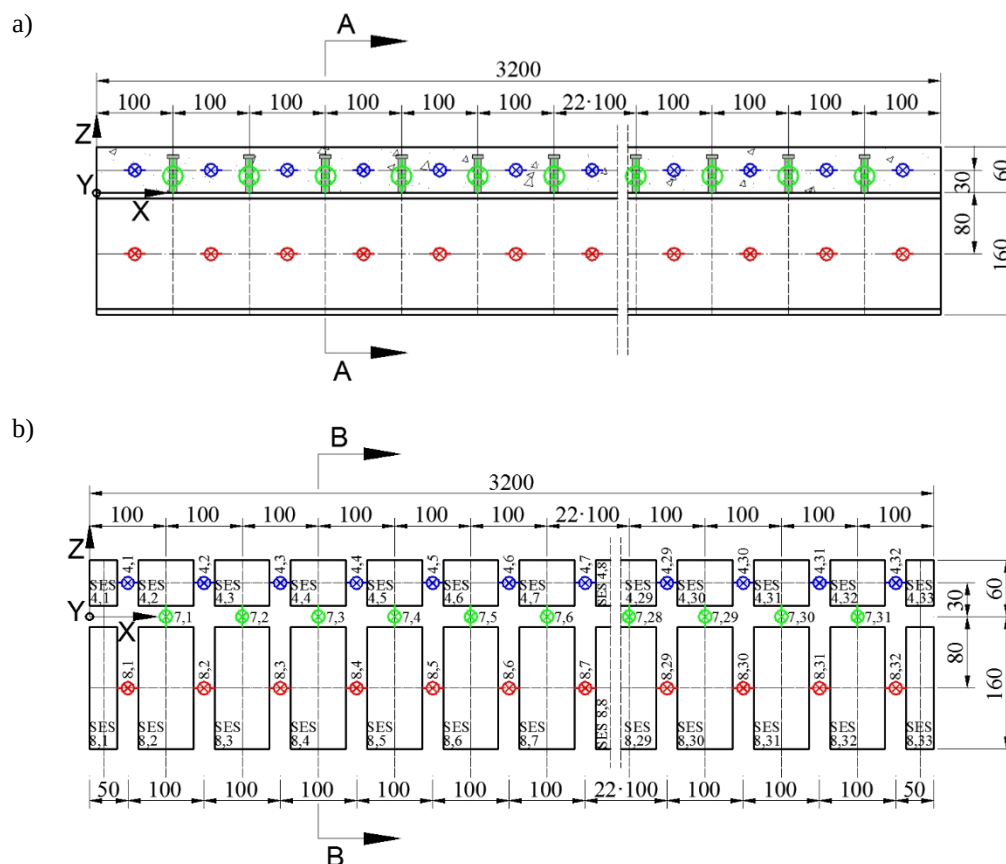
Podział pierwotny oraz wtórny dla belki C2 przedstawiono na Rys. 3.16. Podziału dokonano w następujący sposób, dla belki C2 płytę i kształtownik stalowy na kierunku osi X podzielono na 21 odcinki po 150 mm i skrajne odcinki po 100 mm. Zestawienie otrzymanych EST-ów i SES-ów po podziale wtórnym przedstawiono w tabeli 3.3. W rezultacie uzyskano model składający się z 23 SES-ów modelujących kształtownik stalowy, 23x7 SES-ów modelujących płytę żelbetową oraz z 21 EST-ów modelujących zespolenie (rozstaw kołków co 150 mm) oraz 22 EST-y modelujących połączenie SES-ów kształtownika stalowego oraz dla płyty żelbetowej 22x7 EST-ów na kierunku osi X i 23x6 EST-ów na kierunku osi Y (łącznie 292 EST-y).



Rys. 3.16 Model SES przestrzenny belka C2 - widok w osi belki: a) podział pierwotny; b) podział wtórny.



Podział pierwotny oraz wtórny dla belki C3 przedstawiono na Rys. 3.17. Podziału dokonano w następujący sposób, dla belki C3 płytę i kształtownik stalowy na kierunku osi X podzielono na 33 odcinki po 100 mm. Zestawienie otrzymanych EST-ów i SES-ów po podziale wtórnym przedstawiono w tabeli 3.3.



Rys. 3.17 Model SES przestrzenny belka C3 - widok w osi belki: a) podział pierwotny; b) podział wtórny.

Uzyskano model składający się z 33 SES-ów modelujących kształtownik stalowy, 33x7 SES-ów modelujących płytę żelbetową oraz z 31 EST-ów modelujących zespolecie (rozstaw kołków co 100 mm) oraz 32 EST-y modelujących połączenie SES-ów kształtownika stalowego oraz dla płyty żelbetowej 32x7 EST-ów na kierunku osi X i 33x6 EST-ów na kierunku osi Y (łącznie 422 EST-y).

Tabela 3.3 Liczba otrzymanych SES-ów i EST-ów dla belki zespolonej C1, C2 i C3

BELKA	Liczba SES-ów		Liczba EST-ów		
	IPE	PŁYTA	IPE	PŁYTA	
			X	X	Y
C1	33	33x7=231	16	32x7=224	33x6=198
SUMA	264		438		
C2	23	23x7=161	22	22x7=154	23x6=138
SUMA	184		314		
C3	33	33x7=231	32	32x7=224	33x6=198
SUMA	264		454		

4. Algorytmy identyfikacji parametrów modeli drgań belek zespolonych

Opracowując modele belek stalowo-betonowych metodą SES przyjęto założenie, że sztywność zespolenia: sztywność na ścinanie K_h , sztywność osiowa K_v oraz sztywność rotacyjna $K_{R,X}$ określane będą na drodze estymacji. W ten sam sposób określono również zastępczy dynamiczny moduł sprężystości podłużnej betonu E_c uwzględniający wpływ zastosowanego zbrojenia. Dodatkowo określono współczynniki strat odpowiednio dla betonu η_c , stali η_s i zespolenia η_z . Inne parametry (wymiały belek i płyty, masę właściwą, moduł Younga dla stali, współczynnik Poissona, współczynnik strat dla stali) wykorzystane podczas procesu estymacji w modelu obliczeniowym przyjęto na podstawie danych literaturowych lub inwentaryzacji badanych belek. Wartości pomierzone i przyjęte w procesie estymacji podano w rozdziale 2.1. Podczas estymacji określonych parametrów wykorzystywano procedury optymalizacyjne pakietu MATLAB [37].

Wprowadzono dwa algorytmy identyfikacji. W pierwszym algorytmie parametry estymowano na podstawie częstotliwości drgań własnych i postaci drgań (*algorytm identyfikacji I*), a drugi na podstawie częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń (*algorytm identyfikacji II*).

4.1. Algorytm identyfikacji I

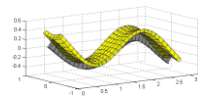
Podczas estymacji parametrów na podstawie częstotliwości drgań własnych i postaci drgań estymowano następujące parametry: sztywność elementów zespalających K_h , K_v , $K_{R,X}$ oraz zastępczy dynamiczny moduł sprężystości podłużnej betonu E_c . W trakcie estymacji przyjęto układ drgań swobodnych, w którym pominięto oddziaływanie zewnętrzne działające na belkę oraz tłumienie.

Równanie różniczkowe drgań swobodnych ma postać:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

gdzie:

$\mathbf{q}$ – wektor współrzędnych uogólnionych.



Sposoby rozwiązania powyższego równania w celu wyznaczenia częstotliwości drgań własnych oraz odpowiadających im postaci drgań zostały szczegółowo opisane w literaturze [43].

Do przeprowadzenia estymacji opracowano własny program w środowisku MATLAB [34, 37, 41]. Umożliwia on rozwiązanie zagadnienia własnego oraz analizę drgań wymuszonych konstrukcji.

W procesie estymacji parametrów przyjęto kryterium minimalizacji w następującej postaci:

$$\begin{aligned} J &= w_f \cdot S + w_\varphi \cdot Z \\ w_f + w_\varphi &= 1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

gdzie:

w_f – waga dopasowania częstotliwości drgań własnych,

w_φ – waga dopasowania postaci drgań własnych.

Takie podejście umożliwiło jednoczesną optymalizację wskaźnika S (dopasowanie częstotliwości drgań własnych) oraz wskaźnika Z (dopasowanie postaci drgań własnych). W celu uwzględnienia w procesie estymacji dopasowania częstotliwości i postaci drgań własnych zastosowano odpowiednie wagi w_f dla częstotliwości oraz w_φ dla postaci drgań własnych. Dla użycia odpowiednich wag konieczne było ustalenie ważności w dopasowaniu częstotliwości drgań, a postaci drgań własnych. Podobne rozwiązanie w swoich pracach zaproponował Mordini [33].

Wskaźnik S (4.3) stanowi sumę kwadratów względnych odchyleń pierwszych n obliczeniowych częstotliwości drgań własnych giętych, m obliczeniowych częstotliwości drgań własnych skrętnych oraz jednej częstotliwości drgań własnych osiowej od tych samych częstotliwości, wyznaczonych w trakcie badań doświadczalnych.

$$S = \sum_{i=1}^n \left(\frac{f_{i_g}^{num} - f_{i_g}^{exp}}{f_{i_g}^{exp}} \right)^2 + \sum_{i=1}^m \left(\frac{f_{i_s}^{num} - f_{i_s}^{exp}}{f_{i_s}^{exp}} \right)^2 + \left(\frac{f_{1_o}^{num} - f_{1_o}^{exp}}{f_{1_o}^{exp}} \right)^2 \quad (4.3)$$

Wskaźnik Z (4.4) jest średnią dopełnienia ze współczynnika MAC (4.5) W ten sposób uwzględniono w procesie estymacji zgodności postaci drgań własnych [30].

$$Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 - MAC(\varphi_{i_g,Z}^{num}, \varphi_{i_g,Z}^{exp}) \right) + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(1 - MAC(\varphi_{i_s,Z}^{num}, \varphi_{i_s,Z}^{exp}) \right) \quad (4.4)$$

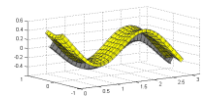
MAC (4.5) jest to kryterium zgodności postaci drgań wyznaczonych doświadczalnie i numerycznie. MAC określa lepsze dopasowanie im jego wartość jest bliższa jedności.

$$MAC(\varphi_{i,Z}^{num}, \varphi_{i,Z}^{exp}) = \frac{|\varphi_{i,Z}^{numT} \cdot \varphi_{i,Z}^{exp}|}{(\varphi_{i,Z}^{expT} \cdot \varphi_{i,Z}^{exp}) \cdot (\varphi_{i,Z}^{numT} \cdot \varphi_{i,Z}^{num})} \quad (4.5)$$

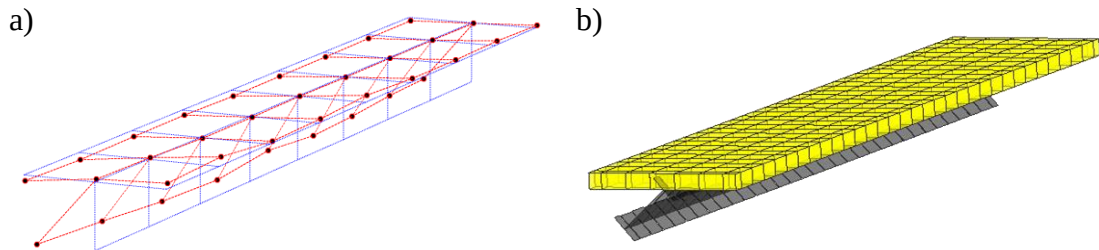
W procesie estymacji uwzględniano tylko postacie drgań własnych na kierunku osi Z .

Jedynym ograniczeń równościowym jakie zostało zdefiniowane był warunek zgodności doświadczalnej i obliczeniowej, zerowej częstotliwości drgań osiowych:

$$f_{0_pd}^{exp} = f_{0_pd}^{num} \quad (4.6)$$



Ograniczenie ma największy wpływ na estymację sztywności rotacyjnej zespolenia na kierunku osi X - $K_{R,X}$ (Rozdział 3.4). W proponowanej procedurze *algorytm identyfikacji I* wartość $K_{R,X}$ będzie ustalona przede wszystkim na podstawie dopasowania zerowej częstotliwości drgań jaką otrzymano dla pasa dolnego ($f_{0,pd}^{exp}$). Jak wykazano podczas analiz wyników doświadczalnych (Rozdział 2.5), częstotliwość ta odpowiada ruchowi całego kształtownika względem płyty żelbetowej. Na Rys. 4.1 przedstawiono porównanie postaci drgań z modelu SES dla belki C1 i postaci drgań otrzymanych podczas badań doświadczalnych.



Rys. 4.1 „Zerowa” postać drgań pasa dolnego dla belki zespolonej C1:
a) badania doświadczalne; b) model przestrzenny SES

W celu wyznaczenia parametrów modelu, które umożliwiają jak najlepsze odwzorowanie postaci i częstotliwości własnych do tych otrzymanych doświadczalnie dokonano minimalizacji wskaźnika Z . Aby rozwiązać zagadnienie wykorzystano procedurę optymalizacji zaimplementowaną w pakiecie *Optimization Toolbox*, należącego do systemu MATLAB. Algorytmy wykorzystują metodę SQP (ang. *Sequential Quadratic Programming*), czyli metody dokonujące szeregu kolejnych minimalizacji kwadratowego przybliżenia funkcji celu. Do minimalizacji kryterium zgodności w procesie estymacji parametrów zastosowano funkcję *fmincon*, która oblicza minimum nieliniowej funkcji wielu zmiennych z liniowymi i nieliniowymi ograniczeniami równościowymi i nierównościowymi. Zadanie minimalizacji ma wtedy postać:

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \text{ przy ograniczeniach } \begin{cases} \mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \mathbf{c}_{eq}(\mathbf{x}) = 0, & \text{(nieliniowe ograniczenia)} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{A}_{eq}\mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq}, & \text{(liniowe ograniczenia)} \\ \mathbf{x}_L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_U & \text{(granice)} \end{cases} \quad (4.7)$$

gdzie:

$\mathbf{x}$ – wektor zmiennych decyzyjnych;

$\mathbf{c}$ – nieliniowe ograniczenia nierównościowe;

$\mathbf{c}_{eq}$ – nieliniowe ograniczenie równościowe;

$\mathbf{A}$ – macierz ograniczeń liniowych nierównościowych;

$\mathbf{b}$ – wektor ograniczeń;

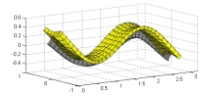
$\mathbf{A}_{eq}$ – macierz ograniczeń liniowych równościowych;

$\mathbf{b}_{eq}$ – wektor ograniczeń liniowych;

$\mathbf{x}_L$ – wektor ograniczeń dolnych na wartości zmiennych niezależnych $\mathbf{x}$;

$\mathbf{x}_U$ – wektor ograniczeń górnych na wartości zmiennych niezależnych $\mathbf{x}$.

Zadanie minimalizacji w funkcji *fmincon* jest rozwiązywane metodą sekwencyjnego programowania kwadratowego.



4.2. Algorytm identyfikacji II

Podczas estymacji parametrów na podstawie częstotliwościowej funkcji przejścia FRF identyfikowano następujące parametry: sztywność elementów zespalających K_h i K_v , zastępczy dynamiczny moduł sprężystości podłużnej betonu E_c oraz współczynników strat betonu η_c i zespolenia η_z . Podczas procesu estymacji parametrów w drugim algorytmie pominięto sztywność rotacyjną $K_{R,X}$ i przyjęto ją na podstawie wartości uzyskanej w wyniku zastosowania *algorytmu identyfikacji I*. Estymacja również nie obejmowała współczynnika strat dla stali η_s . Przyjęto go na podstawie danych z literatury, $\eta_s = 4 \cdot 10^{-4}$.

Estymację współczynników przeprowadzono poprzez dopasowanie amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń uzyskanych na podstawie rozwiązania modelu drgań wymuszonych (2.1) do charakterystyk uzyskanych podczas badań doświadczalnych. Zgodnie z podstawami eksperymentalnej analizy modalnej przedstawionymi w rozdziale 2.3 w metodach klasycznych do estymacji parametrów modalnych wykorzystuje się pomiar wymuszenia i odpowiedzi. W przedstawianym algorytmie wymuszeniem (wejściem do układu) jest siła, a odpowiedzią (wyjściem z układu) jest przyspieszenie. Zależność ta nazywana jest inertancją i określana będzie macierzą $\mathbf{G}(j\omega)$.

Zgodnie z podstawami, które zostały przedstawione w rozdziale 2.3 zależność pomiędzy sztywnością dynamiczną, siłą wymuszenia a otrzymaną charakterystyką z zastosowaniem równań (2.4) i (2.5) można zapisać:

$$\mathbf{Q}(s) = \mathbf{Z}(s)^{-1} \mathbf{F}(s) \quad (4.8)$$

W analizowanym przypadku istnieje potrzeba uzyskania rozwiązania w postaci częstotliwościowej. Aby to osiągnąć należy skorzystać z przekształcenia Fouriera. Rozwiązanie to uzyskujemy wprost z rozwiązania Laplace'a podstawiając do równania (4.8) $s = j\omega$, gdzie $j = \sqrt{-1}$.

$$\mathbf{Q}(j\omega) = \mathbf{Z}(j\omega)^{-1} \cdot \mathbf{F}(j\omega) \quad (4.9)$$

gdzie:

$$\mathbf{Z}(j\omega) = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} \quad (4.10)$$

jest macierzą sztywności dynamicznej, natomiast macierz

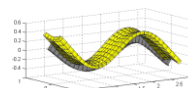
$$\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{Z}^{-1}(j\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C})^{-1} \quad (4.11)$$

jest macierzą podatności dynamicznej.

Między podatnością dynamiczną oraz inertancją istnieje ścisły związek [50]:

$$|\mathbf{G}(j\omega)| = \omega^2 |\mathbf{H}(j\omega)| \quad (4.12)$$

Aby wyznaczyć inertancję układu na podstawie modelu SES, wymagana jest znajomość macierzy sztywności $\mathbf{K}$, bezwładności $\mathbf{M}$ oraz tłumienia $\mathbf{C}$. Sposoby tworzenia macierzy $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ i $\mathbf{C}$ opisano szczegółowo w rozdziale 3.1. Macierz $\mathbf{G}(j\omega)$ jest to macierz o wymiarach $(6n \times 6n)$ dla n elementów o sześciu stopniach swobody.



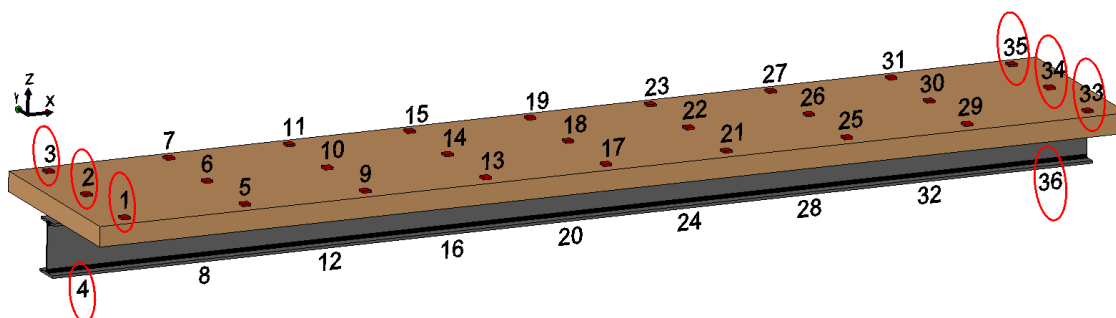
Aby uzyskać przebiegi częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń na wybranym wymuszeniu należy macierz inertancji przemnożyć przez wektor siły $\mathbf{P}$ wymuszającej :

$$\mathbf{X}_j(j\omega) = |\mathbf{G}(j\omega) \cdot \mathbf{P}| \quad (4.13)$$

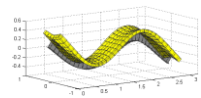
W przypadku wymuszenia impulsem wektor $\mathbf{P}_{(6n \times 1)}$ to wektor składający się z wartości 0 oraz wartości 1 lub -1 w wierszu j oraz na kierunku wymuszenia. Elementy w przykładowym wektorze dla modelu składającego się z dwóch SES-ów o 6 stopniach swobody, przy wymuszeniu na drugi SES, na kierunku (-Z) przedstawiono poniżej:

$$\mathbf{P} = \text{col}(0_{1X}, 0_{1Y}, 0_{1Z}, 0_{1RX}, 0_{1RY}, 0_{1RZ}, 0_{2X}, 0_{2Y}, -1_{2Z}, 0_{2RX}, 0_{2RY}, 0_{2RZ}) \quad (4.14)$$

Podczas prowadzenia estymacji parametrów dla jednej belki zespolonej wektor wymuszeń $\mathbf{P}$ mógł przyjmować trzy postacie w zależności od miejsca i kierunku wymuszenia. Ze względu na różne sposoby podziału pierwotnego belek zespolonych stworzono specjalne oprogramowanie w systemie MATLAB wyliczające w modelu miejsce wymuszenia stosowanego podczas badań doświadczalnych (1-Z, 2-Z i 2+X, patrz Rys. 2.11.b) oraz położenie punktów pomiarowych z badań doświadczalnych (patrz Rys. 2.11.c) względem danego podziału wtórnego. Następnym krokiem było wczytanie określonych podczas badań wartości częstotliwości rezonansowych i ich amplitudy zgodnych z wymuszeniem (1-Z, 2-Z i 2+X) i kierunkiem (dla wymuszeń 1-Z, 2-Z kierunek Z, dla wymuszenia 2+X kierunek X), dla wybranych punktów pomiarowych. Spośród wszystkich punktów pomiarowych, w których była prowadzona rejestracja przyspieszeń, do analizy dla wymuszenia 2-Z wybrano osiem punktów: 2, 4, 34 i 36 – leżące na płaszczyźnie środkowej belki oraz 1, 3, 33 i 35 – leżące w narożach płyty żelbetowej belki zespolonej. Punkty leżące w osi środkowej na skraju belki jak i w narożach płyty żelbetowej uwidaczniały postacie drgań giętnych. Dla kolejnego wymuszenia 1-Z wybrano tylko punkty leżące w narożach płyty żelbetowej belki zespolonej. Było to spowodowane tym, że w tych punktach uzyskano przebiegi uwidaczniające częstotliwości rezonansowych zarówno skrętnych jak i giętnych form drgań. W innych punktach nie otrzymywano aż tak dobrego obrazu rezonansów drgań skrętnych. Dla wymuszenia 2+X wybrano punkty 1, 3, 33 i 35 które uwidaczniały częstość rezonansową osiowej formy drgań belki zespolonej. Rys. 4.2 prezentuje belkę zespoloną z zaznaczonymi punktami z doświadczenia, z których odczytywano odpowiedzi na danym wymuszeniu.



Rys. 4.2 Belka zespolona z zaznaczonymi punktami pomiarowymi (opis w tekście)



Następnie ustalano ile częstotliwości rezonansowych z danego przebiegu przy danym wymuszeniu będzie brana pod uwagę podczas procesu estymacji. Było to związane z tym, ile zidentyfikowano wartości rezonansów dla jednego punktu pomiarowego podczas badań. Do tego celu stworzono moduł oprogramowania w systemie MATLAB, w którym w efekcie końcowym otrzymywano wartości amplitud wraz z danymi rezonansami zapisywane w programie Excel (dla wymuszenia 2-Z i 1-Z otrzymywano pięć częstotliwości rezonansowych i ich amplitud dla każdego punktu pomiarowego, dla wymuszenia 2+X jedną częstotliwość rezonansową i amplitudę dla każdego punktu pomiarowego). Następnie definiowano ile wartości dodatkowych z okolic rezonansów zostanie porównane podczas procesu estymacji parametrów. Punkty te były oddalone o 0,25 Hz i liczba ich wartości była taka sama zarówno na prawo jak i na lewo od danego rezonansu. Wartość kroku 0,25 Hz wynikała z dokładności rejestrowanego sygnału podczas badań doświadczalnych. W ten sposób wyznaczono wektor częstotliwości $\mathbf{f}_{(mx1)}$ dla których są wyznaczone amplitudy częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń oraz punktów dodatkowych. Poniżej pokazano przykładowy wektor dla dwóch rezonansów ($r=2$) i po trzy częstości z każdego rezonansu ($p=3$):

$$\mathbf{f}_{(6x1)} = \text{col}(f_1 - 0,25 \quad f_1 \quad f_1 + 0,25 \quad f_2 - 0,25 \quad f_2 \quad f_2 + 0,25) \quad (4.15)$$

Wektor $\mathbf{f}_{(mx1)}$ osiąga długość równą ($m=r \cdot p$).

Następnie określano dla wybranych rezonansów i punktów z okolic rezonansu (dla wektora $\mathbf{f}_{(mx1)}$) wartości amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń na podstawie modelu SES belki zespolonej. Dokonywano to zgodnie z równaniem (4.13), a następnie odczytywano wartość dla danego punktu pomiarowego dla modelu SES i danego kierunku. W ten sposób powstawał wektor $\mathbf{V}_{k,j}$ o wymiarach ($mx1$) dla częstotliwości określonych wektorem $\mathbf{f}_{(mx1)}$, jednego wymuszenia i jednego punktu z badań:

$$\mathbf{V}_{k,j}^{num} = \mathbf{X}_j(j\omega_i) \quad (4.16)$$

gdzie:

$j=1Z$ to $k=1Z, 3Z, 33Z, 35Z, 2Z, 4Z, 34Z, 36Z$;

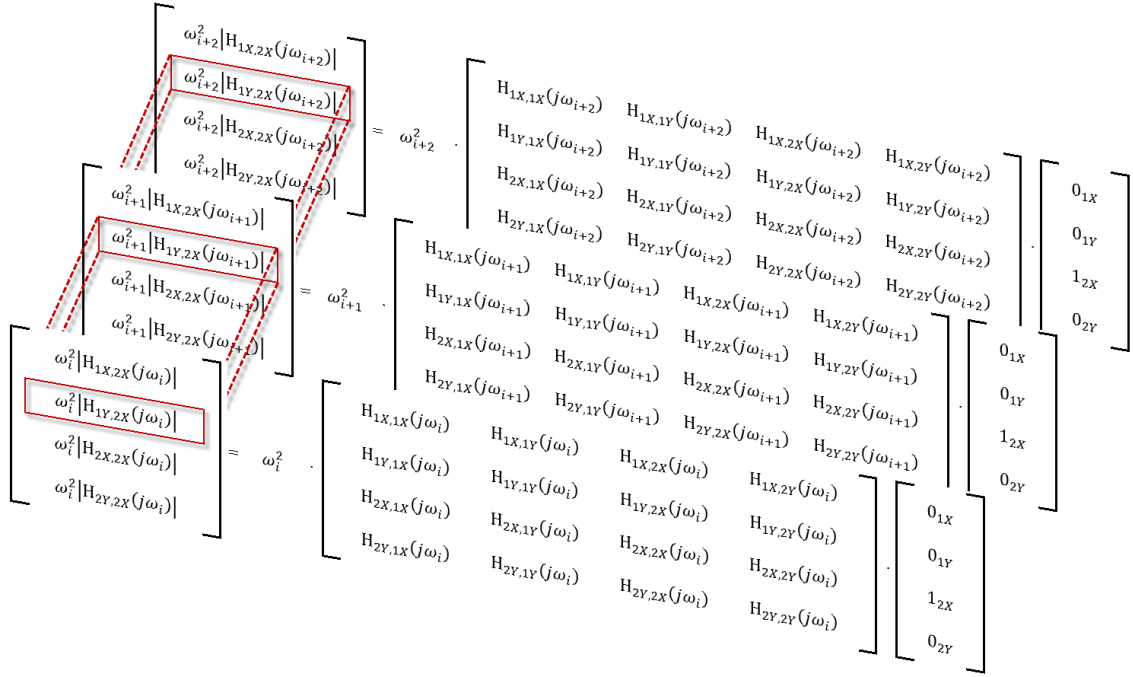
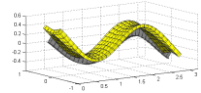
$j=2X$ to $k=1X, 3X, 33X, 35X$;

$j=2Z$ to $k=1Z, 3Z, 33Z, 35Z$.

Przedstawiono to schematycznie dla obiektu o dwóch wybranych stopniach swobody (X, Y) składającego się z dwóch SES-ów, dla przykładowego wektora $\mathbf{f}_{(3x1)}$ (4.17) i wymuszenia $\mathbf{P}_{(4x1)}$ (4.18) na drugi SES na kierunku X (Rys. 4.3). A następnie odczytano wartości amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń dla pierwszego SES-a na kierunku Y , które tworzą wektor $\mathbf{V}_{1Y,2X}^{num}$ (4.19) o wymiarach ($3x1$).

$$\mathbf{f}_{(3x1)} = \text{col}(f_1 - 0,25 \quad f_1 \quad f_1 + 0,25) \quad (4.17)$$

$$\mathbf{P}_{(4x1)} = \text{col}(0_{1X} \quad 0_{1Y} \quad 1_{2X} \quad 0_{2Y}) \quad (4.18)$$



Rys. 4.3 Schemat powstawania macierzy $V_{1Y,2X}^{num}$ (opis w tekście) dla dwóch elementów o dwóch wybranych stopniach swobody (XY) i wymuszeniu na kierunku 1Y

$$V_{1Y,2X}^{num} = \begin{bmatrix} \omega_i^2 |H_{1Y,2X}(j\omega_i)| \\ \omega_{i+1}^2 |H_{1Y,2X}(j\omega_{i+1})| \\ \omega_{i+2}^2 |H_{1Y,2X}(j\omega_{i+2})| \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

W ostatnim etapie dokonywano porównań tych samych wartości wektora $V_{k,j}^{num}$ z modelu SES z takim samym wektorem otrzymanych na podstawie przeprowadzonych badań $V_{k,j}^{exp}$.

Jako kryterium w procesie estymacji przyjęto wskaźnik J_{FRF} (4.20), stanowiące potrójną sumę dla j -tych wymuszeń i odpowiadających im k -tych punktów pomiarowych, sumę kwadratów względnych odchyłek pierwszych m -tych obliczeniowych punktów dla wybranej amplitudy FRF do tej samej amplitudy wyznaczonej w trakcie badań doświadczalnych.

$$J_{FRF} = \sum_j \sum_k \sum_{i=1}^m \left(\frac{V_{k,j,i}^{num} - V_{k,j,i}^{exp}}{V_{k,j,i}^{exp}} \right)^2 \quad (4.20)$$

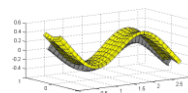
gdzie:

m – ilość punktów uwzględnianych podczas danego procesu estymacji parametrów;

$j=1Z$ to $k=1Z, 3Z, 33Z, 35Z, 2Z, 4Z, 34Z, 36Z$;

$j=2X$ to $k=1X, 3X, 33X, 35X$;

$j=2Z$ to $k=1Z, 3Z, 33Z, 35Z$.



Powyższy algorytm umożliwiał wybór punktu wymuszenia oraz wybór analizowanego punktu odczytu odpowiedzi, co skutkowało możliwością wyboru formy drgań (giętne, skrętne i osiowe). Umożliwiał dobór ilości odczytywanych częstotliwości rezonansowych i punktów w sąsiedztwie, co umożliwiało zwiększenie dokładności dopasowywania amplitud, $(1, 2, \dots, m)$. Podczas estymacji uwzględniano zarówno formy drgań giętnych jak i skrętnych. Do rozwiązania tego zagadnienia jak poprzednio wykorzystano procedurę optymalizacji zaimplementowaną w pakiecie *Optimization Toolbox*, należącego do systemu MATLAB.

4.3. Eksperymenty numeryczne

Celem eksperymentu numerycznego było pokazanie zbieżności i jednoznaczności rozwiązania. Pierwszy eksperyment jaki przeprowadzono miał na celu weryfikację zbieżności otrzymywanych wyników dla *algorytmu I* postanowiono sprawdzić czy pomimo zmiany punktu startowego estymacja parametrów przyniesie jednoznaczne rozwiązanie. Punkty startowe kolejno dla poszczególnych parametrów estymowanych oznaczono jako $K_{h,0}$, $K_{v,0}$, $K_{RX,0}$ i $E_{c,0}$. Wartości początkowe parametrów estymowanych jakie przyjęto w trzech kolejnych próbach dla belki zespolonej C1 zestawiono w tabeli 4.1. Wyniki obliczeń zaprezentowano dla belki zespolonej C1 w tabeli 4.2. Podczas obliczeń przyjęto wagi równościowe ($w_f = 0,5$, $w_\varphi = 0,5$).

Tabela 4.1 Zestawienie punktów startowych dla estymowanych parametrów K_h , K_v , K_{RX} , E_c , dla modelu belki zespolonej C1

	PRÓBA NR 1	PRÓBA NR 2	PRÓBA NR 3
$K_{h,0}$ [N/m]	3,00E+08	2,80E+08	2,90E+08
$K_{v,0}$ [N/m]	2,90E+08	2,70E+08	2,80E+08
$K_{R,X,0}$ [Nm/m]	4,80E+03	4,90E+03	5,00E+03
$E_{C,0}$ [N/m ²]	2,50E+10	2,70E+10	2,60E+10

Wartość przedstawionego w tabelach wskaźnika Δ obliczana była na podstawie zależności:

$$\Delta = \frac{f_i^{num} - f_i^{exp}}{f_i^{exp}} \quad (4.21)$$

Pozostałe wyniki wraz z punktami startowymi zestawiono w *Załączniku A* w tabelach (Tabela Z.12, Tabela Z.13) dla belki zespolonej C2 i w tabelach (Tabela Z.14, Tabela Z.15) dla belki zespolonej C3.

Jak możemy zaobserwować wyniki otrzymane są prawie takie same (różnice w wynikach mniejsze niż 0,5%), *algorytm identyfikacji I* można zatem uznać za zbieżny i jednoznaczny.

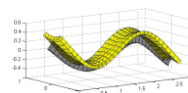


Tabela 4.2 Zestawienie wyników estymowanych parametrów K_h , K_v , $K_{R,X}$, E_c , dla modelu belki zespolonej C1, dla trzech różnych punktów startowych

	PRÓBA NR 1			PRÓBA NR 2			PRÓBA NR 3		
i	f_i^{exp} [Hz]	f_i^{num} [Hz]	Δ [%]	f_i^{exp} [Hz]	f_i^{num} [Hz]	Δ [%]	f_i^{exp} [Hz]	f_i^{num} [Hz]	Δ [%]
1 _s	64,24	63,64	-0,9	64,24	63,64	-0,9	64,24	63,64	-0,9
2 _s	143,66	142,93	-0,5	143,66	142,91	-0,5	143,66	142,92	-0,5
3 _s	217,68	216,37	-0,6	217,68	216,35	-0,6	217,68	216,35	-0,6
4 _s	299,75	297,68	-0,7	299,75	297,66	-0,7	299,75	297,66	-0,7
5 _s	387,92	381,57	-1,6	387,92	381,57	-1,6	387,92	381,57	-1,6
1 _g	73,38	74,08	0,9	73,38	74,07	0,9	73,38	74,07	0,9
2 _g	167,41	165,19	-1,3	167,41	165,19	-1,3	167,41	165,19	-1,3
3 _g	262,02	263,06	0,4	262,02	263,07	0,4	262,02	263,06	0,4
4 _g	356,48	357,56	0,3	356,48	357,58	0,3	356,48	357,57	0,3
5 _g	446,75	439,87	-1,5	446,75	439,87	-1,5	446,75	439,87	-1,5
1 _o	567,30	577,07	1,7	567,30	577,03	1,7	567,30	577,04	1,7
0 _{pd}	92,04	92,04	0,0	92,04	92,04	0,0	92,04	92,04	0,0
K_h [N/m]	2,828E+08			2,828E+08			2,828E+08		
K_v [N/m]	2,745E+08			2,750E+08			2,747E+08		
$K_{R,X}$ [Nm/m]	4,961E+03			4,961E+03			4,961E+03		
E_c [N/m ²]	2,793E+10			2,792E+10			2,792E+10		

Jako drugi eksperyment numeryczny jaki przeprowadzono było sprawdzenie zbieżności i jednoznaczności otrzymywanych parametrów z zastosowaniem *algorytmu identyfikacji II*. Wartości początkowe parametrów estymowanych jakie przyjęto w trzech kolejnych próbach dla belki zespolonej C1 zestawiono w tabeli 4.3. oraz wyniki w tabeli 4.4. Podczas prób przyjęto wymuszenie w punkcie 2 na kierunku osi Z, badano zbieżność amplitud w punktach na kierunku osi Z.

Tabela 4.3 Zestawienie punktów startowych dla estymowanych parametrów K_h , K_v , E_c , η_c i η_z , dla modelu belki zespolonej C1

	PRÓBA NR 1	PRÓBA NR 2	PRÓBA NR 3
$K_{h,0}$ [N/m]	2,80E+08	2,50E+08	2,00E+08
$K_{v,0}$ [N/m]	2,70E+08	1,60E+08	2,50E+08
$E_{c,0}$ [N/m ²]	2,70E+10	2,80E+10	2,40E+10
$\eta_{c,0}$ [-]	8,10E-03	8,40E-03	9,20E-03
$\eta_{z,0}$ [-]	3,30E-02	3,50E-02	3,80E-02

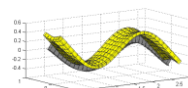


Tabela 4.4 Zestawienie wyników estymowanych parametrów K_h , K_v , E_c , η_c i η_z , dla modeli belki zespolonej C1, dla trzech różnych punktów startowych

	PRÓBA NR 1	PRÓBA NR 2	PRÓBA NR 3
K_h [N/m]	3,481E+08	3,482E+08	3,482E+08
K_v [N/m]	2,283E+08	2,284E+08	2,283E+08
E_c [N/m ²]	2,835E+10	2,834E+10	2,835E+10
η_c [-]	7,201E-03	7,216E-03	7,204E-03
η_z [-]	3,203E-02	3,210E-02	3,203E-02
J_{FRF}	6,079E-02	6,081E-02	6,079E-02

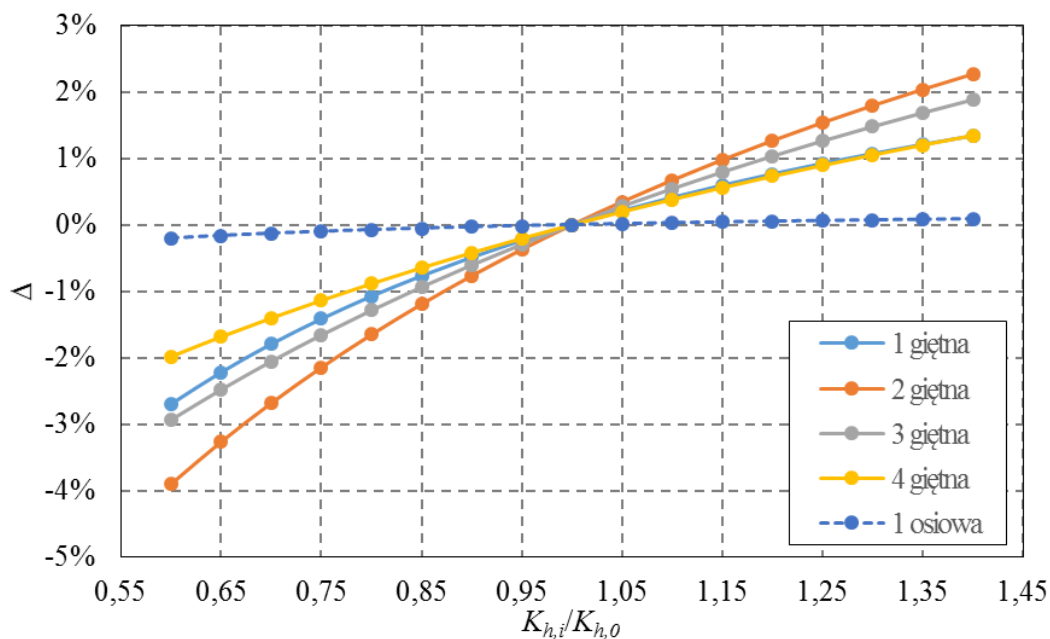
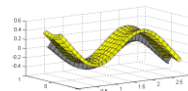
Wyniki przeprowadzonej zbieżności wyników są jednoznaczne. Taką samą próbę przeprowadzono dla belki C2 oraz belki C3 wyniki zestawiono w *Załączniku A*. Dla belki C2 w tabelach (Tabela Z.16, Tabela Z.17), a dla belki C2 w tabelach (Tabela Z.18, Tabela Z.19).

4.4. Ocena wrażliwości charakterystyk dynamicznych na zmianę estymowanych parametrów

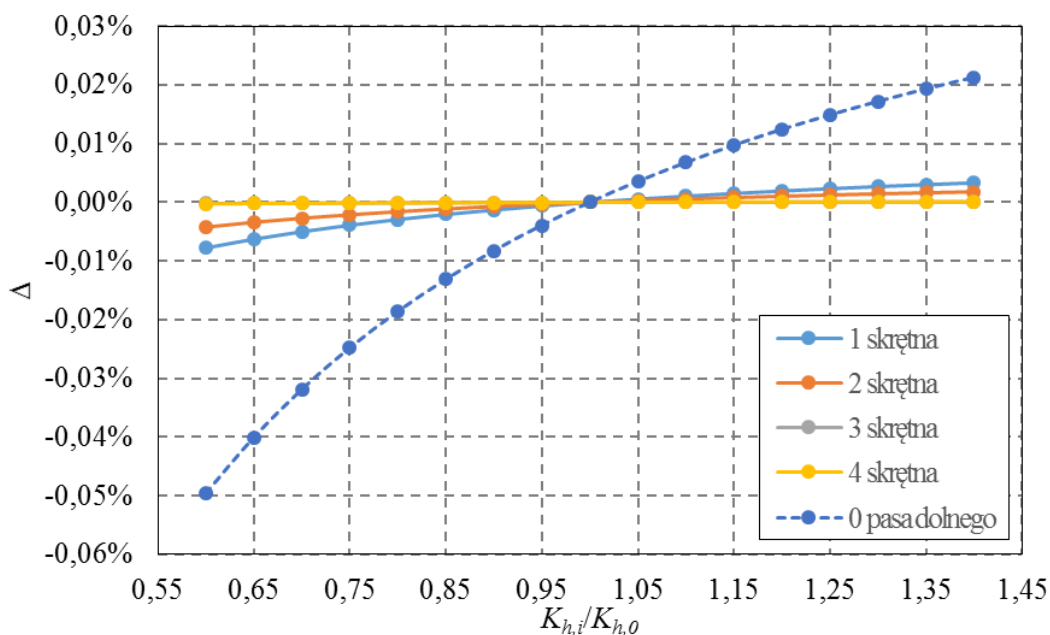
Po przeprowadzeniu eksperymentów numerycznych mających na celu ocenę ich skuteczności dla algorytmów identyfikacji przeprowadzono analizy wpływu zmienności identyfikowanych parametrów na otrzymywane charakterystyki. W pierwszym cyklu analiz zdecydowano się zbadać wpływ zmian parametrów K_h , K_v , $K_{R,X}$ i E_c na wartości częstotliwości drgań własnych. Wartości początkowe parametrów uzyskano podczas estymacji według *algorytmu identyfikacji I*. Analizy przeprowadzono dla modelu belki zespolonej C1, oddzielnie dla każdego identyfikowanego parametru zarówno dla sztywności zespolenia (K_h , K_v , $K_{R,X}$) oraz dla dynamicznego modułu sprężystości betonu (E_c). Wartościami parametrów odniesienia były wartości uzyskane podczas eksperymentów numerycznych i oznaczono jako $K_{h,0}$, $K_{v,0}$, $K_{R,X,0}$ i $E_{c,0}$. Analizowane parametry zmieniano w zakresie od 60% do 140% wartości odniesienia. Wskaźnik Δ obliczany był według zależności (4.22), gdzie $f_{0,i}$ to wartości częstotliwości giętnych, skrętnych, osiowej oraz „zerowej” pasa dolnego ustalonych dla modelu belki zespolonej C1 na podstawie wartości odniesienia estymowanych parametrów, a f_i to wartości częstotliwości ustalane dla zmienianego parametru $K_{h,i}$, $K_{v,i}$, $K_{R,X,i}$ lub $E_{c,i}$.

$$\Delta = \frac{f_i - f_{0,i}}{f_{0,i}} \quad (4.22)$$

W pierwszym etapie obliczeń zmieniano tylko sztywność zespolenia na ścinanie $K_{h,i}$. Uzyskane wyniki przedstawiono w postaci wykresów (Rys. 4.4 i Rys. 4.5). Analizując wykresy można zaobserwować, że zwiększenie sztywności zespolenia na ścinanie K_h powoduje wzrost wszystkich analizowanych częstotliwości giętnych. Z kolei częstotliwości skrętne, „zerowa” pasa dolnego oraz osiowa forma drgań pozostaje niewrażliwa na zmianę K_h .

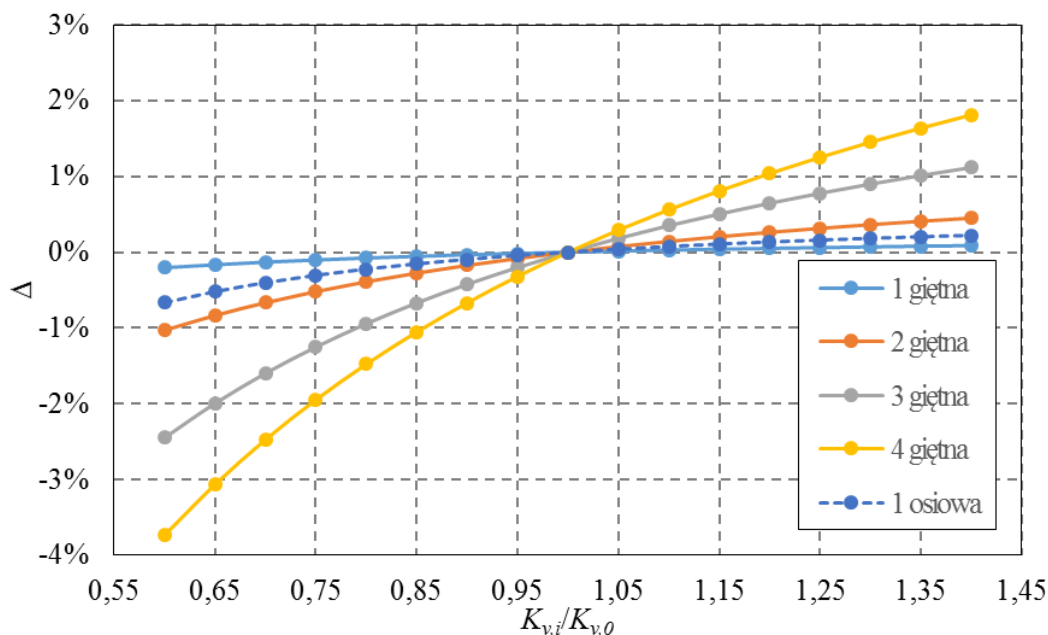
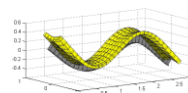


Rys. 4.4 Zmiana częstotliwości drgań giętnych i częstotliwości osiowej w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki zespolonej C1



Rys. 4.5 Zmiana częstotliwości drgań skrętnych i częstotliwości „zerowej” pasa dolnego w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki zespolonej C1

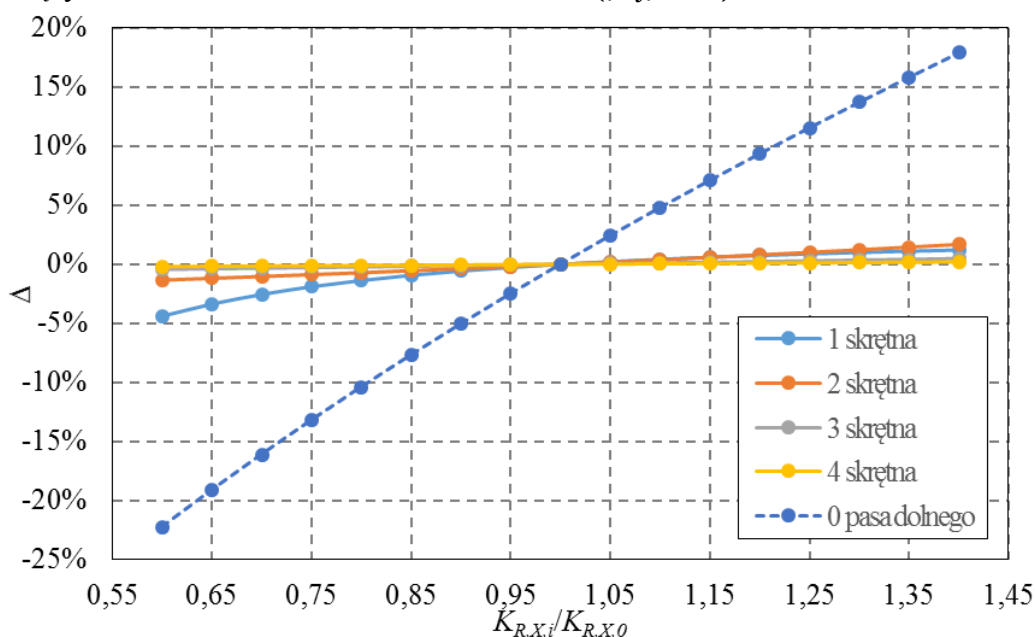
W drugim etapie analizy wrażliwości badano zależności wskaźnika Δ od wartości sztywności osiowej zespolenia $K_{v,i}$. W przypadku zmiany sztywności osiowej K_v (Rys. 4.6) zaobserwowano, że ma ona dość duży wpływ na wszystkie częstotliwości giętne. Podstawowa częstotliwość drgań osiowych, podobnie jak wcześniej, wykazuje znikomą wrażliwość na zmianę sztywności K_v . Taki sam wynik uzyskano dla częstości drgań skrętnych oraz „zerowej” pasa dolnego.



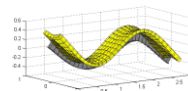
Rys. 4.6 Zmiana częstotliwości drgań giętnych i częstotliwości osiowej w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki zespolonej C1

Porównując wykresy przedstawione na (Rys. 4.4) i (Rys. 4.6) widać, że niższe częstotliwości drgań giętnych są bardziej wrażliwe na zmiany sztywności K_h , wyższe natomiast na zmiany sztywności osiowej K_v . Podczas analizy zmian parametrów sztywności stycznej K_h oraz osiowej K_v nie odnotowano ich wpływu na zmianę wartości częstotliwości skrętnych (Rys. 4.6).

W następnym etapie dokonywano zmiany sztywności rotacyjnej na kierunku osi X parametru $K_{R,X}$. Na Rys. 4.7 przedstawiono wykres zmian częstotliwości drgań własnych, skrętnych oraz „zerowej” pasa dolnego, dla pozostałych częstotliwości nie uzyskano znaczących wartości dla zależności wskaźnika Δ ($|\Delta_i| < 10^{-8}$).

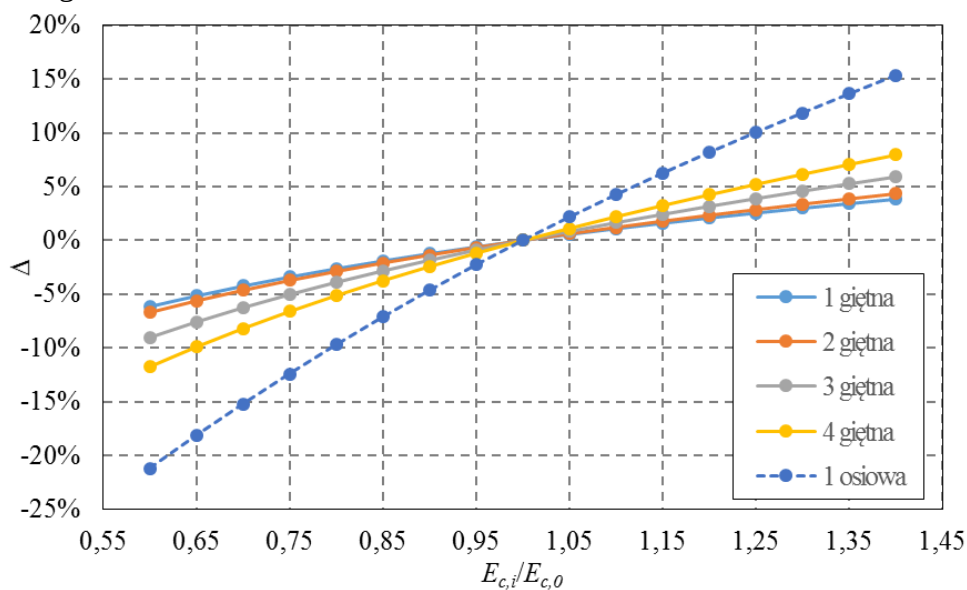


Rys. 4.7 Zmiana częstotliwości drgań skrętnych i częstotliwości „zerowej” pasa dolnego w zależności od zmiany sztywności $K_{R,X}$, dla modelu belki zespolonej C1

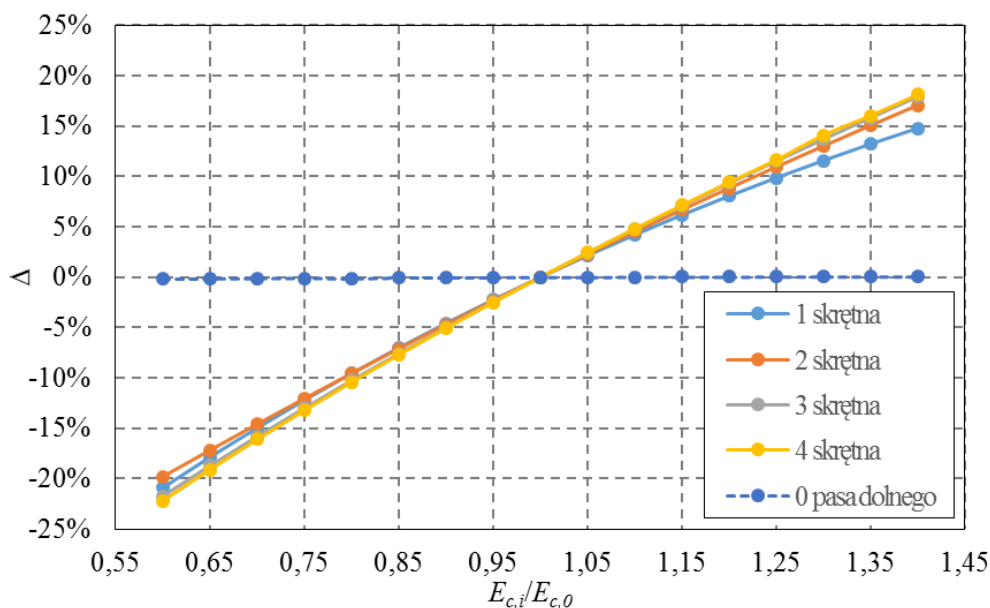


Analizując wykres zaobserwowano, że zmiana tego parametru ma znaczący wpływ na „zerową” częstotliwość pasa dolnego, wprowadzone ograniczenie równościowe (4.6) jest zatem zasadne. Słuszność wprowadzenie tego parametru do modelowania drgań przestrzennych i wybrania (wariantu II – połączenia zespolenia, rozdział 3.4) potwierdza fakt, że ten parametr ma istotny wpływ na zmianę częstotliwości skrętnych.

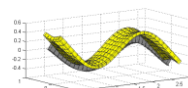
W ostatnim etapie zmianę stanowił zastępczy moduł sprężystości podłużnej betonu $E_{c,i}$. W przypadku zmiany zastępczego modułu sprężystości podłużnej betonu E_c wyraźnie widać, że dużą wrażliwość na zmianę tego parametru wykazuje częstotliwość osiowa formy drgań (Rys. 4.8) oraz częstotliwości drgań skrętnych (Rys. 4.9). Zmiany tego parametru nie mają wpływu w ogóle na zmianę wartości częstotliwości „zerowej” pasa dolnego.



Rys. 4.8 Zmiana częstotliwości drgań giętnych i częstotliwości osiowej w zależności od zmiany zastępczego modułu sprężystości podłużnej betonu E_c dla modelu belki zespolonej C1



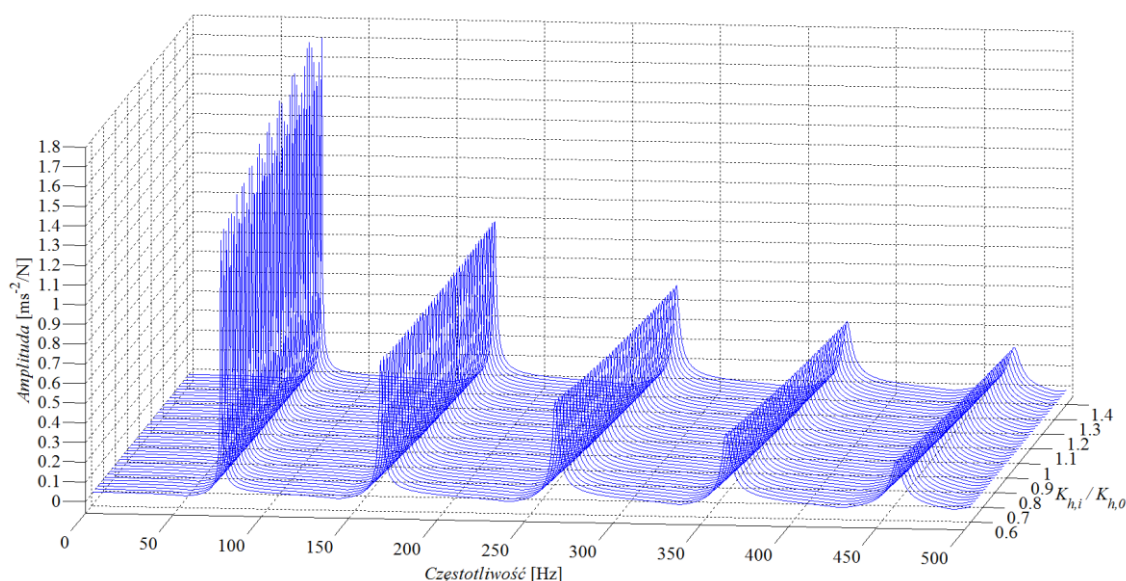
Rys. 4.9 Zmiana częstotliwości drgań skrętnych i częstotliwości „zerowej” pasa dolnego w zależności od zmiany zastępczego modułu sprężystości podłużnej betonu E_c dla modelu belki zespolonej C1



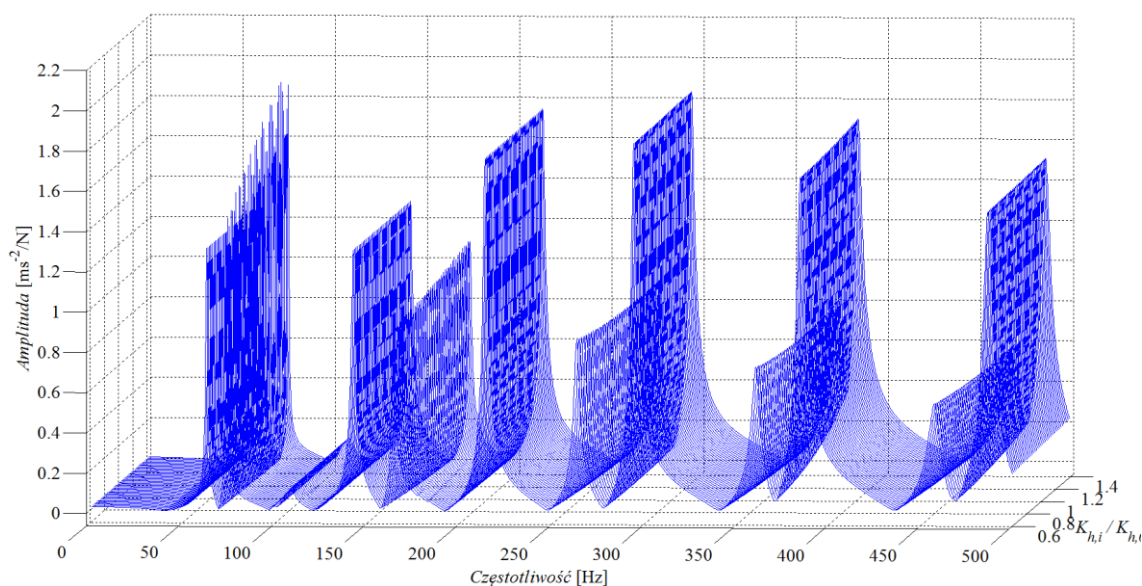
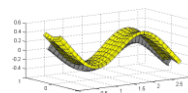
Takiej samej analizie wrażliwości poddano parametry K_h , K_v , $K_{R,X}$ i E_c belki zespolonej C2 jej wyniki przedstawiono w *Załączniku B* (Rys. Z. 62 - Rys. Z. 67) oraz dla belki C3 *Załącznik B* (Rys. Z. 68 - Rys. Z. 73). Wykresy potwierdzają taki sam wpływ zmiany parametrów na wartości częstotliwości drgań własnych jak przedstawiona powyżej analiza.

W drugim cyklu analizy oceny wrażliwości identyfikowanych parametrów analizowano wpływ zmienności parametrów K_h , K_v , E_c , η_c i η_z na zmiany przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń. Charakterystyki te uzyskiwano podczas estymacji parametrów według *algorytmu identyfikacji II*. Analizy przeprowadzono dla modelu belki zespolonej C2, oddzielnie dla każdego identyfikowanego parametru zarówno dla sztywności zespolenia (K_h , K_v), dla dynamicznego modułu sprężystości betonu (E_c) oraz współczynników strat (η_c i η_z). Wartości parametrów ustalonych na podstawie estymacji (prowadzonej podczas eksperymentów numerycznych) przyjęto jako wartości odniesienia i oznaczono jako $K_{h,0}$, $K_{v,0}$, $E_{c,0}$, $\eta_{c,0}$ i $\eta_{z,0}$. Jak poprzednio analizowane parametry zmieniano w zakresie od 60% do 140% wartości odniesienia. Następnie dla zmienianych parametrów wyznaczono przebiegi amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń dla reprezentowanych punktów pomiarowych (1-4, 33-36), z których amplitudy częstotliwościowych funkcji przyspieszeń będą dopasowywane podczas estymacji parametrów za pomocą *algorytmu identyfikacji II* (dokładny opis w rozdziale 4.2).

W pierwszym etapie obliczeń zmieniano tylko sztywność zespolenia na ścinanie $K_{h,i}$. Uzyskane wyniki przedstawiono w postaci wykresów (Rys. 4.10 - Rys. 4.13). Analizując wykresy można zaobserwować, że zwiększenie sztywności zespolenia na ścinanie K_h powoduje wzrost wartości amplitud częstotliwości rezonansowych giętych od drugiej do piątej. Amplitudy częstotliwości rezonansowych form drgań skrętnych pozostają niewrażliwe na zmianę K_h .

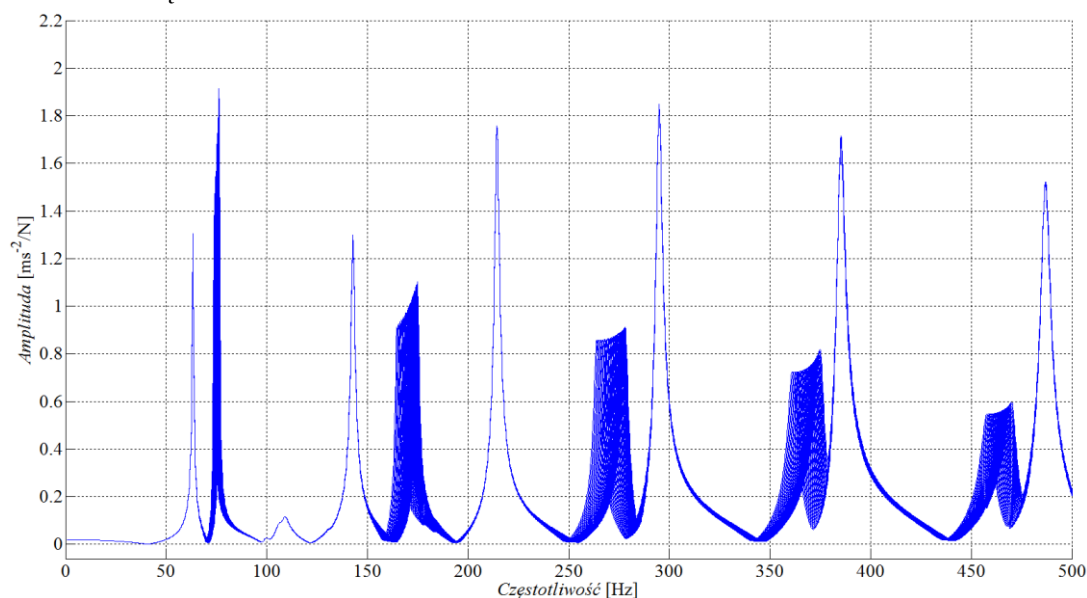


Rys. 4.10 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, punkt 2, kierunek Z



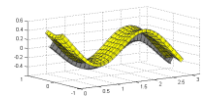
Rys. 4.11 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki zespolonej C2, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z

Obserwując zachowanie amplitudy odpowiadającej podstawowej częstotliwości rezonansowej drgań giętnych widać, że występują zaburzenia przebiegu wartości szczytowej. Określenie przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia było wykonane co 0,25 Hz, co powodowało, że nie zawsze wartość amplitudy była określana dla dokładnej częstotliwości rezonansowej. Aby móc wyznaczyć dokładny przebieg szczytowej wartości amplitudy należałoby przeprowadzić obliczenia z jeszcze większą dokładnością.

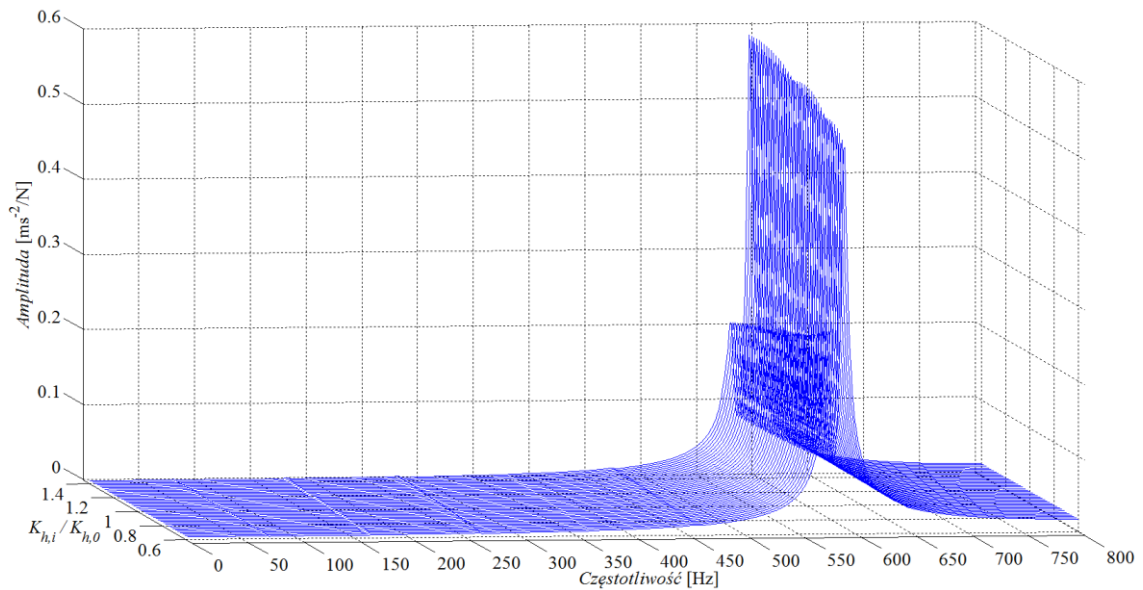


Rys. 4.12 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki zespolonej C2, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z – układ płaski

Po naniesieniu wszystkich wyznaczonych przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń dla różnych wartości sztywności zespolenia $K_{h,i}$ w układzie płaskim (Rys. 4.12) odnotowano, że parametr K_h wpływa na wzrost wszystkich wartości

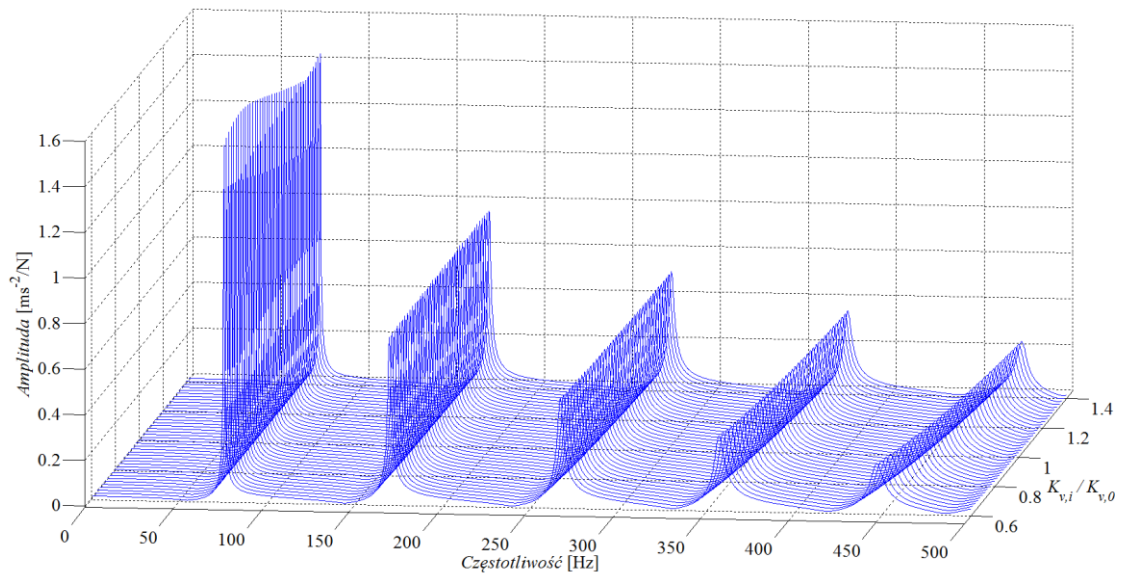


częstotliwości rezonansowych form drgań giętnych. Analizując wpływ sztywności na ścinanie na wartość amplitudy częstotliwości rezonansowej osiowej postaci drgań zauważono jej przyrost (Rys. 4.13).

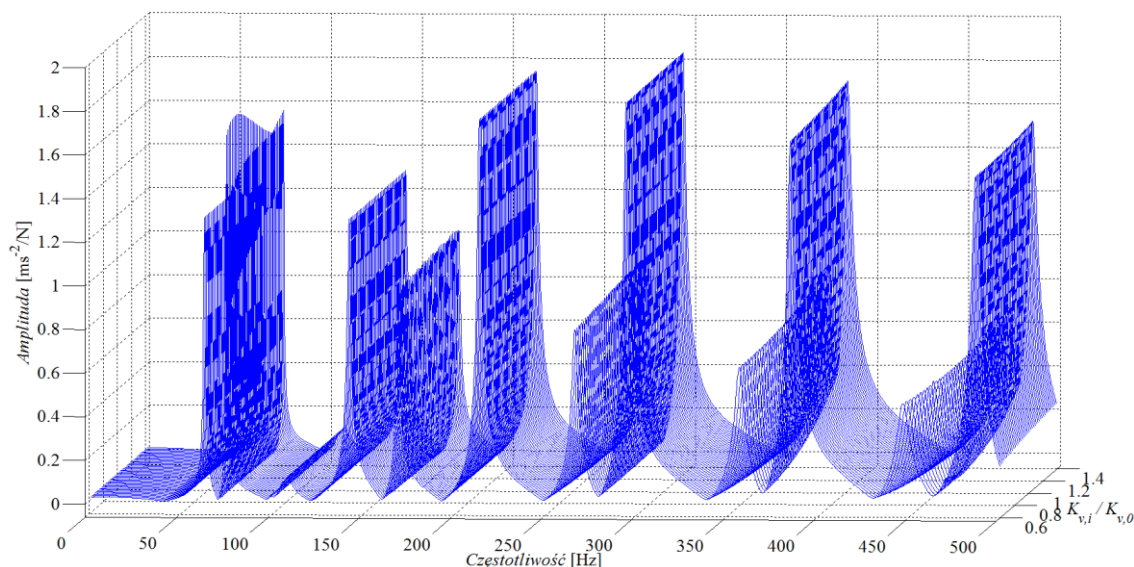
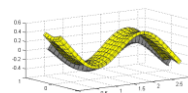


Rys. 4.13 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki zespolonej C2, wymuszenie $2+X$, punkt 33, kierunek X

W drugim etapie analizy wrażliwości badano zależności zmiany przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń od wartości sztywności osiowej zespolenia $K_{v,i}$ (Rys. 4.14 - Rys. 4.17).

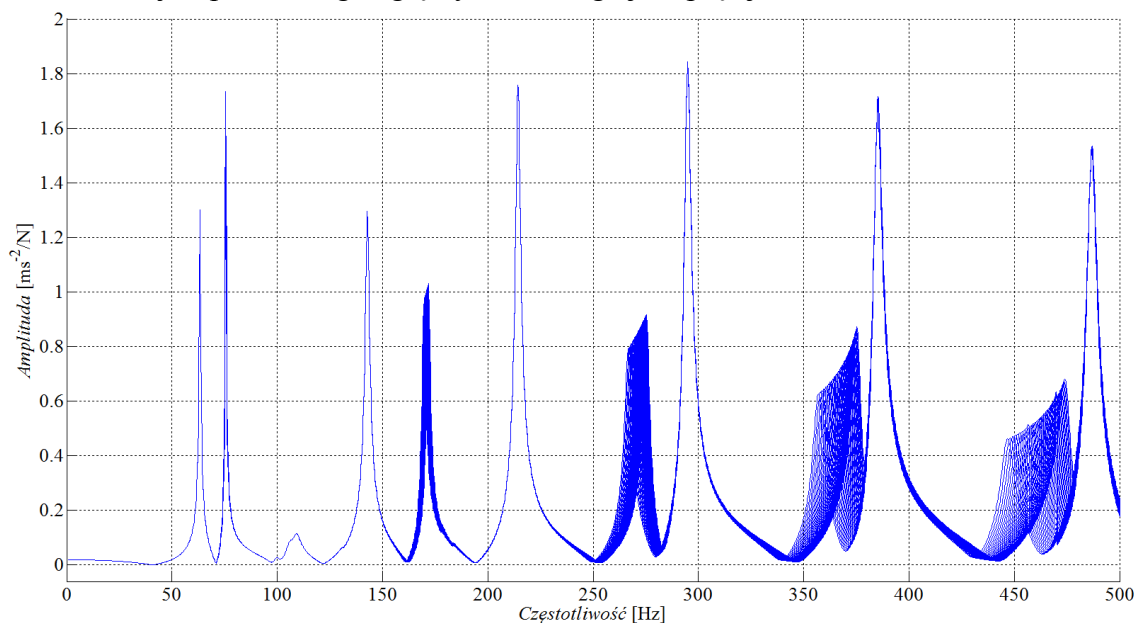


Rys. 4.14 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki zespolonej C2, wymuszenie $2-Z$, punkt 2, kierunek Z

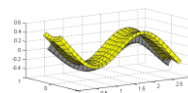


Rys. 4.15 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki zespolonej C2, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z

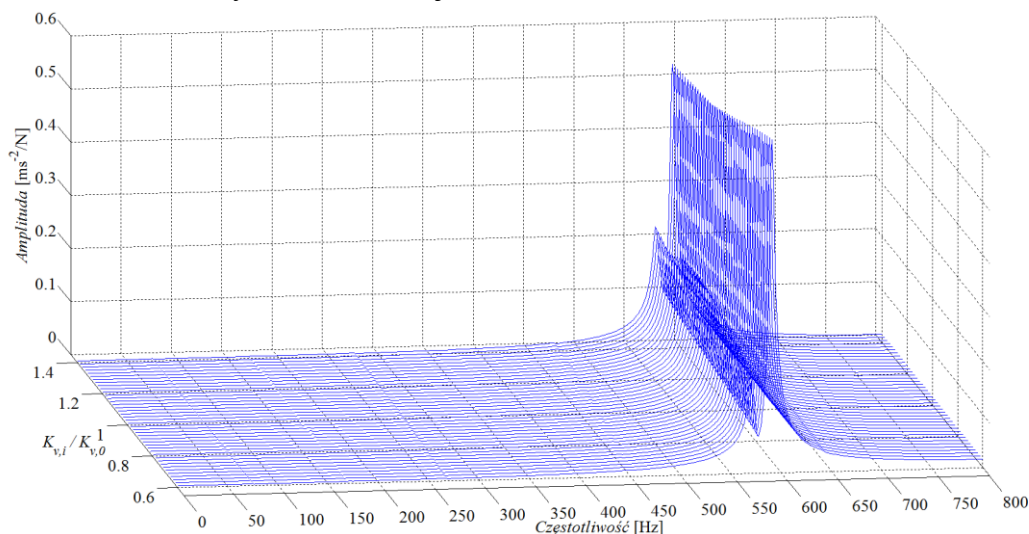
W przypadku zmiany sztywności osiowej K_v odnotowano wzrost dla wszystkich identyfikowanych amplitud rezonansowych giętnych postaci drgań. Amplitudy częstotliwości rezonansowych form drgań skrętnych wykazują znikomą wrażliwość na zmianę sztywności K_v . Po przeanalizowaniu wykresu (Rys. 4.15) i przedstawieniu wszystkich obliczonych przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń dla różnych wartości sztywności zespolenia $K_{v,i}$ w układzie płaskim (Rys. 4.16) zauważono, że parametr K_v wpływa na zmianę wartości częstotliwości rezonansowych postaci drgań giętnych od drugiej do piątej.



Rys. 4.16 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki zespolonej C2, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z – układ płaski

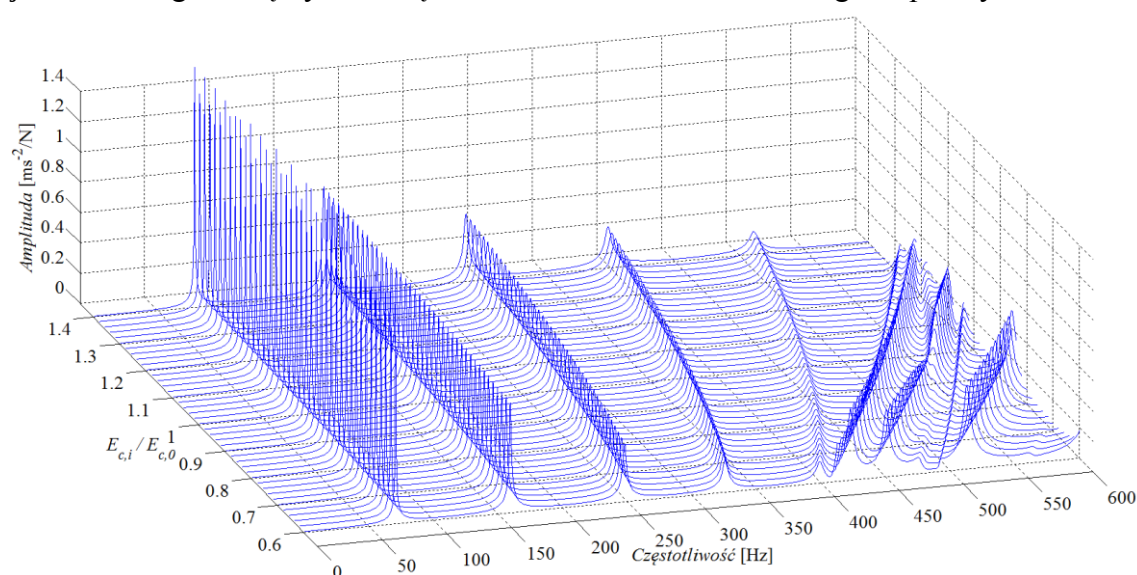


Na Rys. 4.17 przedstawiono wrażliwość przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń dla wymuszenia $2+X$, na kierunku X na zmianę sztywności K_v . Wartość amplitudy częstotliwości rezonansowej osiowej postaci drgań lekko rośnie wraz ze wzrostem sztywności osiowej.

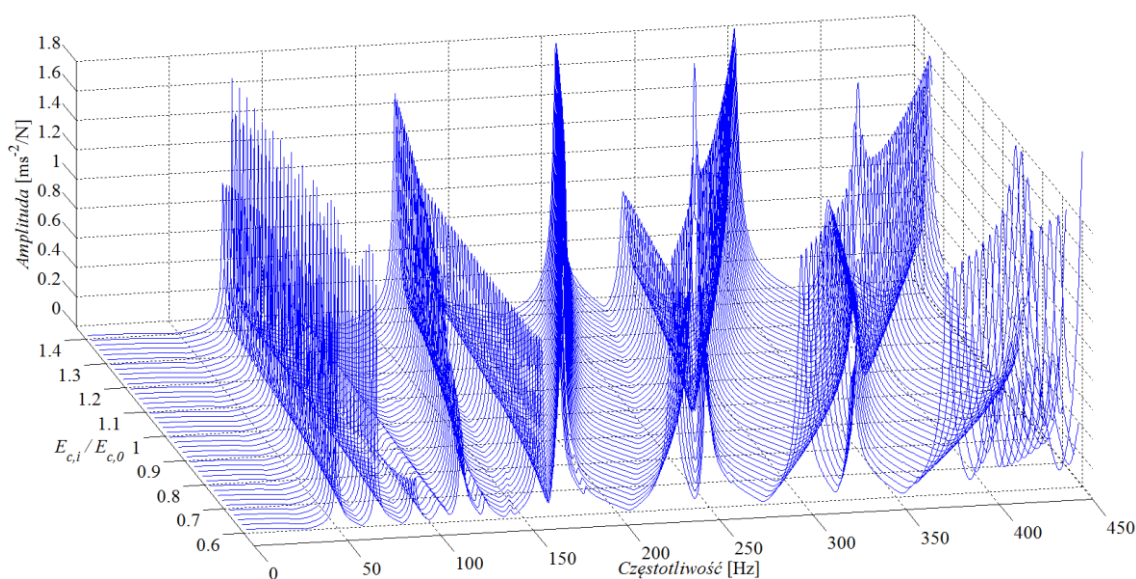
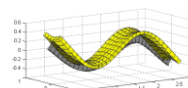


Rys. 4.17 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki zespolonej C2, wymuszenie $2+X$, punkt 33, kierunek X

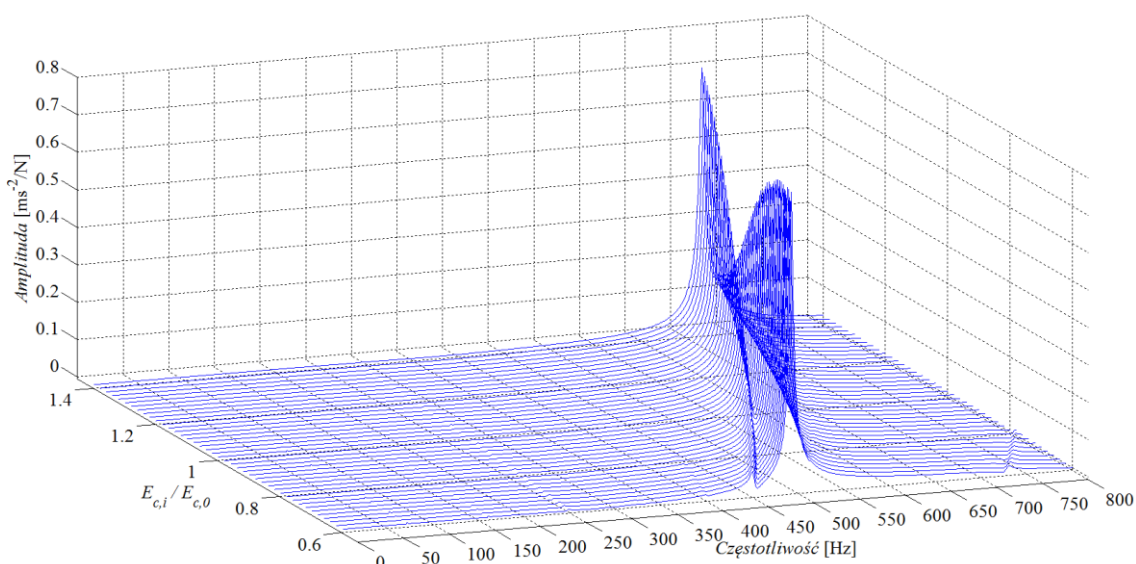
W przypadku zmiany zastępczego modułu sprężystości podłużnej betonu $E_{c,i}$ wyraźnie widać, że dużą wrażliwość na zmianę tego parametru wykazują wszystkie amplitudy częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń oraz wartości częstotliwości rezonansowych (Rys. 4.18, Rys. 4.19). Największy wpływ zmiany współczynnika E_c zaobserwowano na wartości amplitud rezonansowych częstotliwości postaci drgań skrętnych, poza tym zmiany te są widoczne dla wartości częstotliwości rezonansowych. Zarówno wartości częstotliwości rezonansowych form drgań giętnych jak i form drgań skrętnych rosną wraz ze wzrostem analizowanego współczynnika.



Rys. 4.18 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany zastępczego modułu sprężystości podłużnej betonu E_c , dla modelu belki zespolonej C2, wymuszenie $2-Z$, punkt 36, kierunek Z



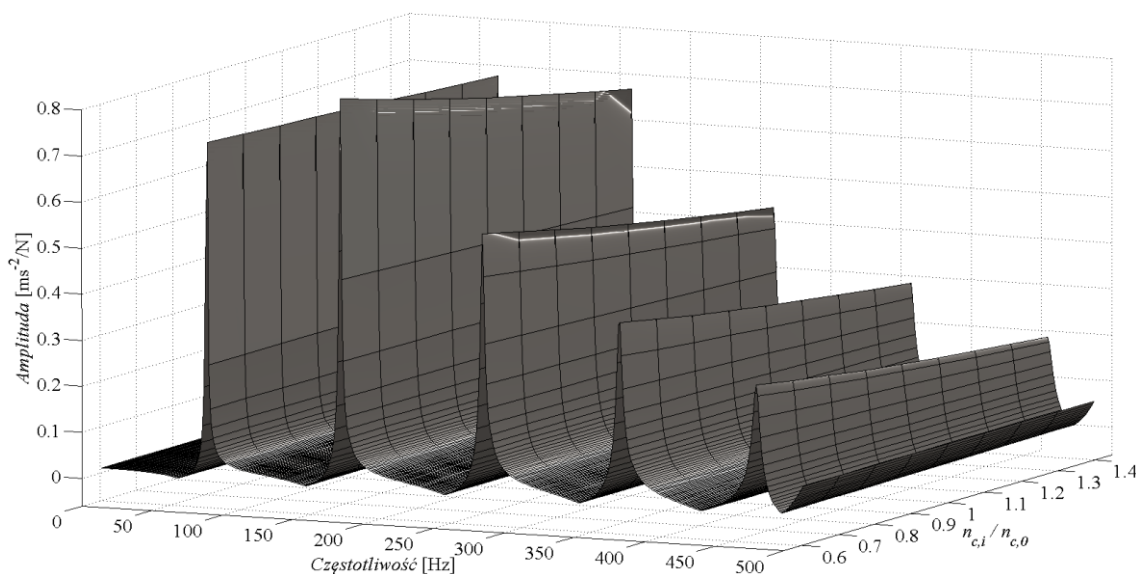
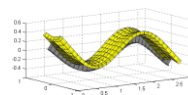
Rys. 4.19 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany zastępczego modułu sprężystości podłużnej betonu E_c , dla modelu belki zespolonej C2, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z



Rys. 4.20 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany zastępczego modułu sprężystości podłużnej betonu E_c , dla modelu belki zespolonej C2, wymuszenie 2+X, punkt 1, kierunek X

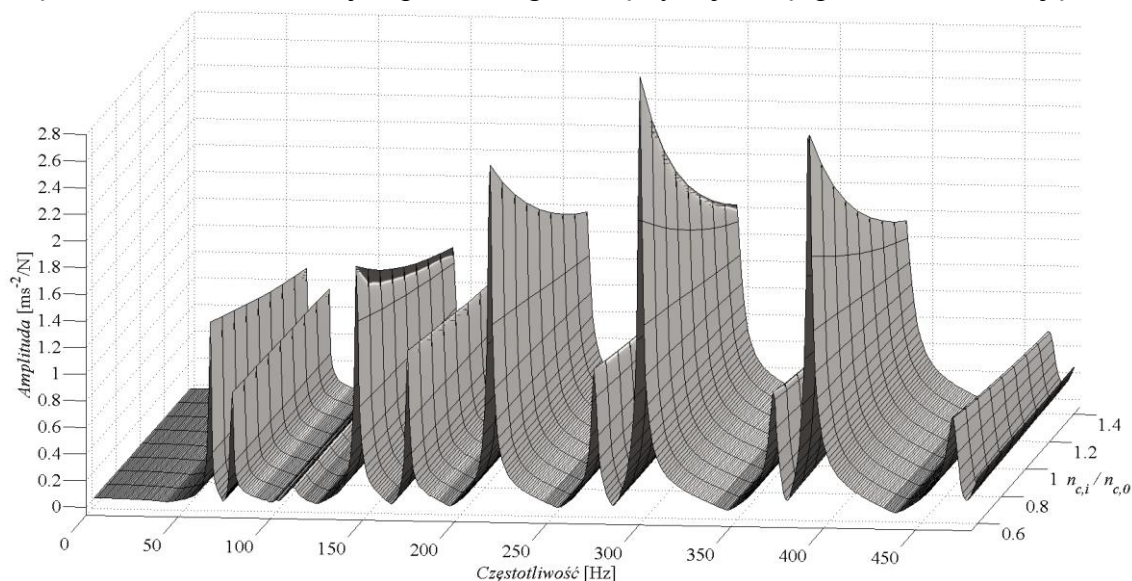
Analizując wrażliwość przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń dla wymuszenia 2+X, kierunek X, na zmiany zastępczego modułu sprężystości podłużnej betonu widać wzrost wartości częstotliwości rezonansowej wraz ze wzrostem współczynnika (Rys. 4.20).

Następnie badano zależności zmiany przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń od zmiany wartości współczynnika strat betonu $\eta_{c,i}$. Na Rys. 4.21 przedstawiono wpływ współczynnika strat betonu na amplitudy częstotliwości rezonansowych postaci drgań giętnych zaobserwowano, że ich wartości maleją wraz ze wzrostem współczynnika η_c . Jednak zmiany te są niewielkie.



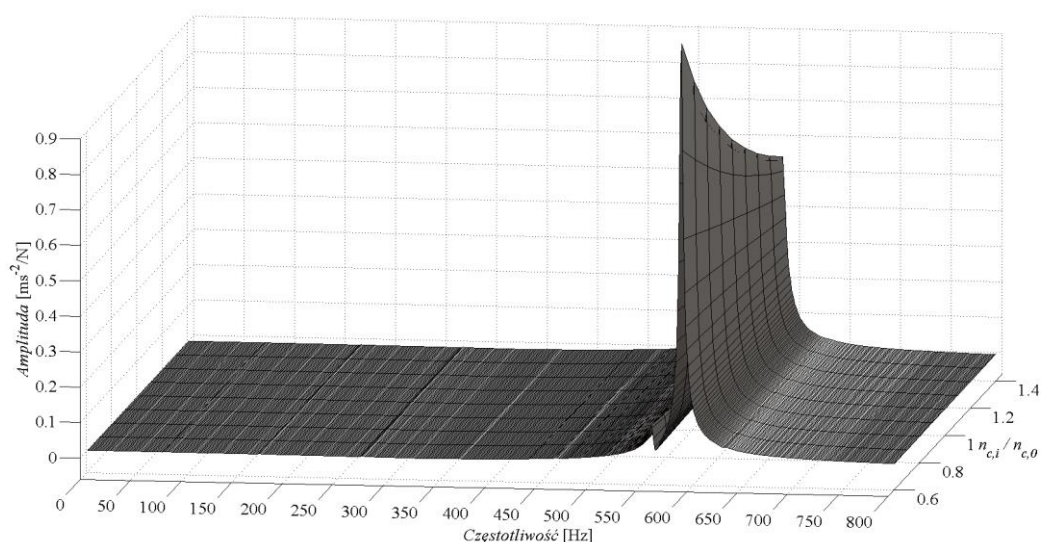
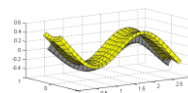
Rys. 4.21 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat betonu η_c , dla modelu belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, punkt 2, kierunek Z

Analizując wpływ współczynnika strat betonu na amplitudy częstotliwości rezonansowych form drgań skrętnych zmiany ich wartości, wraz ze wzrostem współczynnika, są zdecydowanie widoczne (Rys. 4.22). Wartości amplitud częstotliwości rezonansowych postaci drgań skrętnych jak się spodziewano maleją.



Rys. 4.22 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat betonu η_c , dla modelu belki zespolonej C2, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z

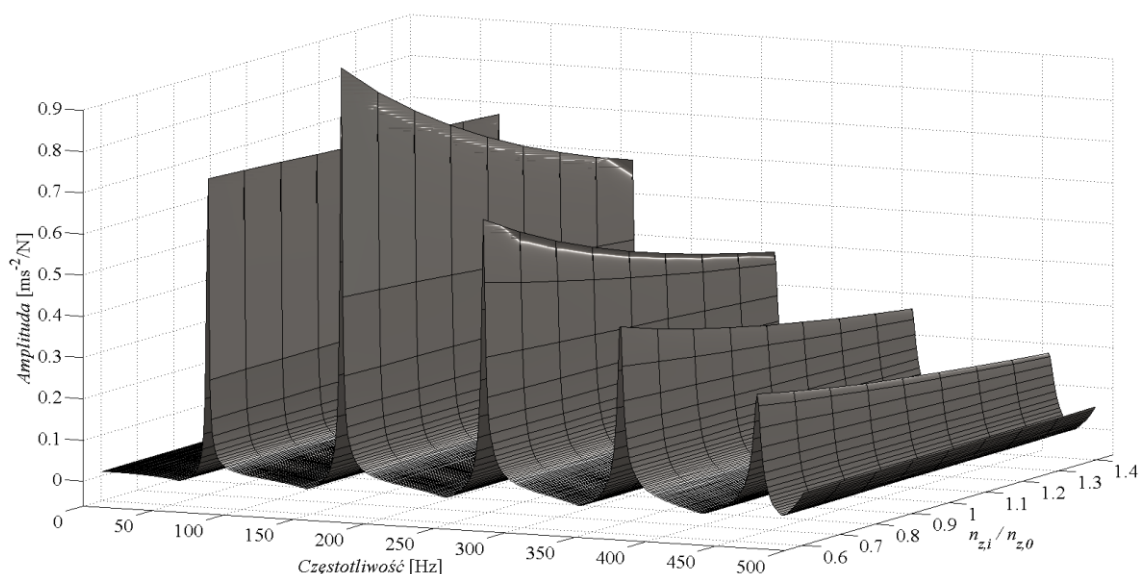
Taki sam wpływ odnotowano dla wartości amplitudy częstotliwości rezonansowej osiowej postaci drgań (Rys. 4.23).



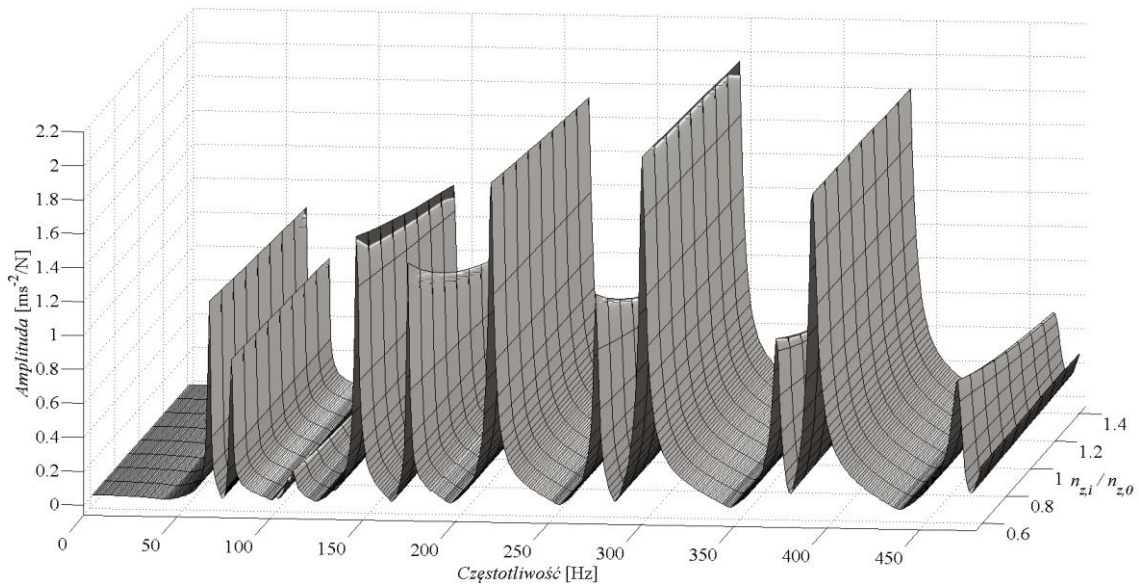
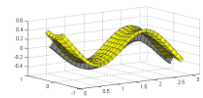
Rys. 4.23 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat betonu η_c , dla modelu belki zespolonej C2, wymuszenie 2+X, punkt 3, kierunek X

We wszystkich przypadkach badania wrażliwości przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń na współczynnik η_c , odnotowano spadek wartości amplitud wraz ze wzrostem współczynnika straty, co było zgodne z oczekiwaniami.

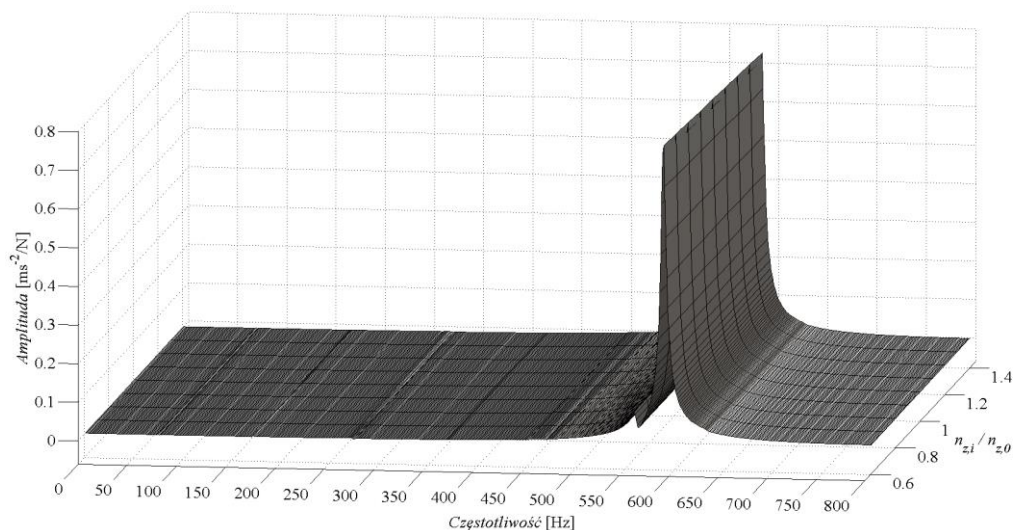
W ostatnim etapie zmianę stanowił współczynnik strat zespolenia $\eta_{z,i}$. W przypadku zmiany tego parametru odnotowano jedynie jego wpływ na wartości amplitud częstotliwości rezonansowych form drgań giętych (Rys. 4.24). Ich wartości maleją wraz ze wzrostem współczynnika η_z . Na pozostałe wartości amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń są znikome albo w ogóle (Rys. 4.25 i Rys. 4.26).



Rys. 4.24 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat zespolenia η_z , dla modelu belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, punkt 2, kierunek Z



Rys. 4.25 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat zespolenia η_z , dla modelu belki zespolonej C2, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z



Rys. 4.26 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat zespolenia η_z , dla modelu belki zespolonej C2, wymuszenie 2+X, punkt 33, kierunek X

Po analizie powyższych wykresów nasuwa się wniosek, że największy wpływ na wartości rezonansów oraz wartości amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń form giętnych mają parametry K_h , K_v , η_z , E_c , a form skrętnych η_c i także E_c . Wykonana powyżej analiza oceny wrażliwości wykazuje jakie powinno dobierać się punkty wymuszeń oraz które wartości rezonansów częstotliwościowych uwzględniać podczas estymacji parametrów K_h , K_v , E_c , η_c i η_z . Zaproponowany algorytm identyfikacji II daje możliwość wyboru punktów pomiarowych, punktów wymuszeń oraz wyboru wartości częstotliwości rezonansowych (patrz rozdział 4.2). Taką samą analizę przeprowadzono dla pozostałych belek zespolonych i zestawiono ją w Załączniku B odpowiednio dla belki C1 (Rys. Z. 74 - Rys. Z. 90) i dla belki C3 (Rys. Z. 91 - Rys. Z. 107). Wnioski są takie same jak dla belki C2.

5. Estymacja parametrów modelu

W poniższym rozdziale zawarto porównanie wyników dynamicznych badań doświadczalnych z wynikami uzyskanymi na podstawie zaproponowanego modelu obliczeniowego (rozdział 3). Estymację parametrów sztywności zespolenia, zastępczego dynamicznego modułu sprężystości podłużnej betonu, współczynników strat betonu oraz zespolenia poprowadzono na podstawie wyznaczonych doświadczalnie częstotliwości drgań własnych, postaci drgań oraz przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń dla belek zespolonych. Estymację parametrów przeprowadzono na podstawie zaproponowanych algorytmów identyfikacji (rozdział 4) *algorytmu identyfikacji I* i *algorytmu identyfikacji II*.

5.1. Estymacja parametrów modelu belki zespolonej – *algorytm identyfikacji I*

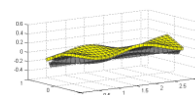
Dane przyjęto do modelu SES belek zespolonych na podstawie literatury oraz z pomiaru inwentaryzacyjnego i zestawiono w tabeli 5.1 i tabeli 5.2.

Tabela 5.1 Belki zespolonej C1, C2 i C3. Zestawienie parametrów modelu SES dla kształtownika stalowego IPE 160

KSZTAŁTOWNIK STALOWY IPE 160										
BELKA	L_s [m]	h_s [m]	J_{ys} [m ⁴]	J_{zs} [m ⁴]	J_{Ts} [m ⁴]	A_s [m ²]	ρ_s [kg/m ³]	m_s [kg]	E_s [N/m ²]	ν_s -
C1	3,2	0,160	8,693E-06	6,831E-07	3,610E-08	2,01E-03	7850	50,47	2,10E+11	0,3
C2										
C3										

Tabela 5.2 Belki zespolonej C1, C2 i C3. Zestawienie parametrów modelu SES dla płyty żelbetowej

PŁYTA ŻELBETOWA							
BELKA	L_c [m]	B [m]	h_c [m]	A_c [m ²]	ρ_c [kg/m ³]	m_c [kg]	ν_c -
C1	3,2	0,60	0,0613	0,0368	2322,07	273,28	0,2
C2			0,0614	0,0368	2309,79	272,30	
C3			0,0617	0,0370	2333,50	276,44	



Współczynnik sprężystości poprzecznej dla kształtownika stalowego i dla płyty żelbetowej obliczono z zależności:

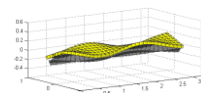
$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 - \nu)} \quad (5.1)$$

Jako pierwszą estymację przeprowadzono uwzględniając w obliczeniach w takim samym stopniu dopasowanie częstotliwości drgań własnych i postaci drgań własnych. W wyniku przeprowadzonej estymacji parametrów (K_h , K_v , $K_{R,X}$ i E_c) według *algorytmu identyfikacji I* przy ustalonych wagach równościowych ($w_f = 0,5$, $w_\varphi = 0,5$) otrzymano wartości parametrów zestawione w tabeli 5.3. Następnie dla tych wartości wyznaczono pięć częstotliwości drgań własnych giętnych i skrętnych oraz po jednej częstotliwości drgań własnych pasa dolnego i osiowej. Dokonano porównania doświadczalnych i obliczeniowych częstości drgań dla wszystkich belek zespolonych i zestawiono je również w tabeli 5.3. Wskaźnik Δ wyznaczony ze wzoru (4.21) przedstawia różnice procentowe dla obliczeniowych i doświadczalnych częstotliwości drgań własnych.

Tabela 5.3 Zestawienie wyników estymowanych parametrów K_h , K_v , $K_{R,X}$, E_c oraz porównanie doświadczalnych f_i^{exp} i obliczeniowych f_i^{num} częstości drgań, belki zespolone C1, C2 i C3

	BELKA C1			BELKA C2			BELKA C3		
i	f_i^{exp} [Hz]	f_i^{num} [Hz]	Δ [%]	f_i^{exp} [Hz]	f_i^{num} [Hz]	Δ [%]	f_i^{exp} [Hz]	f_i^{num} [Hz]	Δ [%]
1_s	64,24	63,66	-0,9	64,55	63,30	-1,9	66,35	64,55	-2,7
2_s	143,66	142,96	-0,5	143,06	142,16	-0,6	146,60	145,13	-1,0
3_s	217,68	216,42	-0,6	216,90	215,13	-0,8	221,42	220,13	-0,6
4_s	299,75	297,76	-0,7	298,18	295,65	-0,8	302,83	303,01	0,1
5_s	387,92	381,57	-1,6	383,97	385,02	0,3	394,70	395,05	0,1
1_g	73,38	74,05	0,9	73,59	73,68	0,1	75,37	75,78	0,5
2_g	167,41	165,08	-1,4	166,03	164,22	-1,1	174,82	172,95	-1,1
3_g	262,02	262,84	0,3	262,24	263,43	0,5	277,68	278,61	0,3
4_g	356,48	357,22	0,2	356,25	360,88	1,3	378,80	382,90	1,1
5_g	446,75	439,87	-1,5	456,09	458,09	0,4	485,53	487,56	0,4
1_o	567,30	577,12	1,7	559,64	575,44	2,8	573,08	586,68	2,4
0_{pd}	92,04	92,04	0,0	92,87	92,87	0,0	95,38	95,38	0,0
K_h [N/m]	2,808E+08			1,727E+08			2,179E+08		
K_v [N/m]	2,710E+08			3,490E+08			3,993E+08		
$K_{R,X}$ [Nm/m]	4,961E+03			3,719E+03			2,627E+03		
E_c [N/m ²]	2,794E+10			2,753E+10			2,871E+10		

W tabeli 5.4 przedstawiono wartości wskaźników S (4.3) i Z (4.4). Wskaźniki te podzielono na składowe $S_{f,s}$ suma kwadratów względnych odchyłeń dla częstotliwości drgań skrętnych doświadczalnych i obliczeniowych, $S_{f,g}$ suma kwadratów względnych



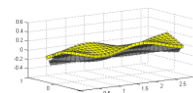
odchylen dla częstotliwości drgań giętnych doświadczalnych i obliczeniowych i $S_{f,o}$ suma kwadratów względnych odchylen dla częstotliwości drgań osiowych doświadczalnych i obliczeniowych. Parametr odpowiedzialny za pomiar dopasowania doświadczalnych i obliczeniowych postaci drgań własnych wyznaczano tylko dla postaci drgań własnych skrętnych $Z_{f,s}$ i giętnych $Z_{f,g}$.

Tabela 5.4 Zestawienie wyników wskaźników S, Z i J, dla belek zespolonych C1, C2 i C3

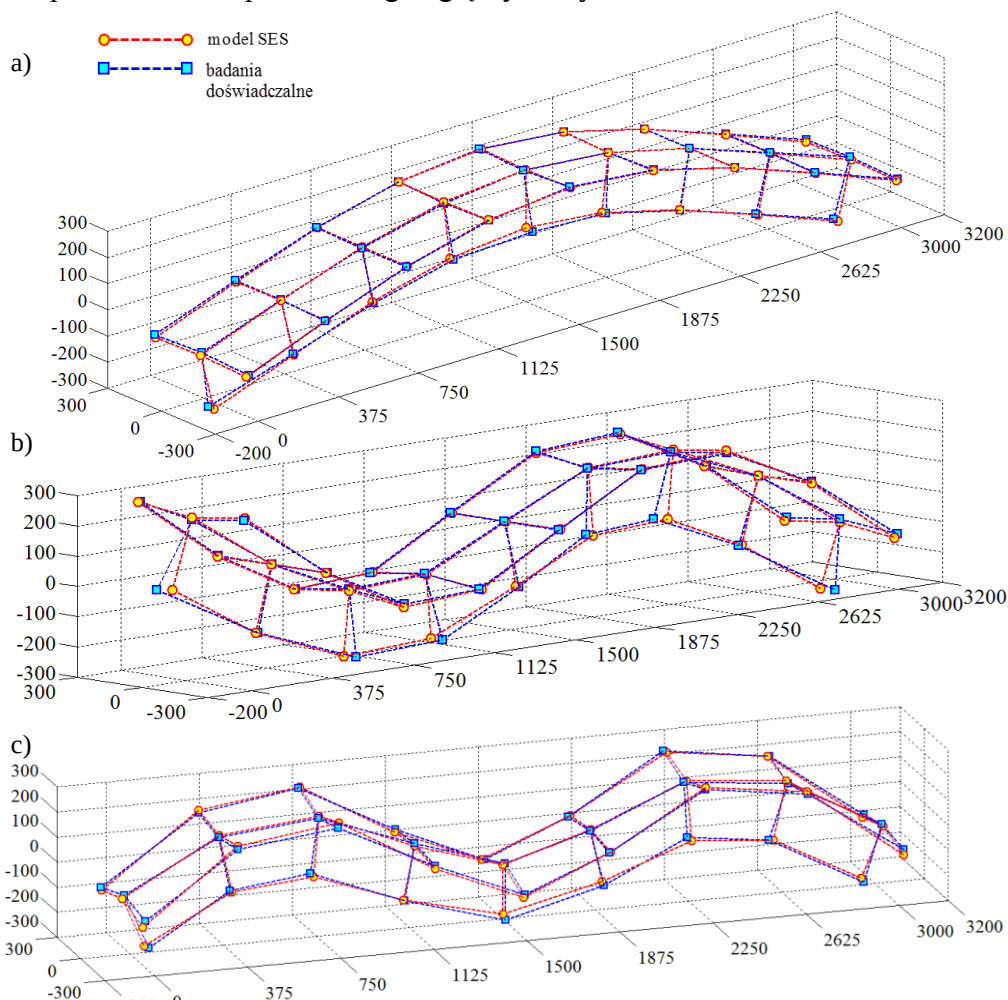
Wskaźnik	BELKA C1	BELKA C2	BELKA C3
$S_{f,s}$	1,836E-04	5,610E-04	8,664E-04
$S_{f,g}$	3,918E-04	3,296E-04	2,889E-04
$S_{f,o}$	3,001E-04	7,980E-04	5,624E-04
S	8,755E-04	1,689E-03	1,718E-03
w_f	0,5	0,5	0,5
$Z_{f,s}$	3,459E-03	3,319E-03	3,422E-03
$Z_{f,g}$	5,955E-03	6,897E-03	2,510E-02
Z	9,415E-03	1,022E-02	2,852E-02
w_φ	0,5	0,5	0,5
J	5,15E-03	5,952E-03	1,512E-02

Analizując wyniki otrzymano dobre dopasowanie częstotliwości drgań dla wszystkich belek. Największą wartość wskaźnika Δ (~3%) otrzymano dla częstotliwości drgań formy osiowej dla belek C2 i C3 oraz dla częstotliwości drgań pierwszej formy giętej dla belki C3. Przy porównaniu pozostałych doświadczalnych i obliczeniowych częstotliwości wskaźnik Δ osiągał wartość poniżej 2%.

W następnym kroku dokonano porównania graficznego postaci drgań wyznaczonych doświadczalnie i uzyskanych z modelu dla wyestymowanych parametrów. Wszystkie wykresy postaci drgań zostały tak wykonane, aby było możliwe porównanie bezpośrednie postaci drgań z modelu SES, z tymi otrzymanymi na podstawie badań dynamicznych. Siatka punktów pomiarowych obejmowała 36 punktów (patrz Rys. 2.11.c). Podczas rozwiązywania przestrzennego modelu obliczeniowego SES wartości otrzymano jako wektory postaci drgań dla punktów leżących w środku ciężkości elementów SES płyty żelbetowej i środkach ciężkości elementów SES kształtownika stalowego. Tak więc siatka punktów pomiarowych nie pokrywała się z otrzymywanymi wynikami. Aby było możliwe porównanie bezpośrednie wyników obliczeniowych i doświadczalnych postaci drgań, dokonano transformacji wyników z modelu obliczeniowego SES, do punktów pomiarowych. Transformacji dokonywano uwzględniając odległość punktu, w którym mierzone były przyspieszenia od środka ciężkości odpowiedniego elementu SES (na kierunku osi X, Y, Z) oraz kątów obrotów danego elementu (na kierunku osi RX, RY, RZ). Wszystkie obliczeniowe wektory własne poddane zostały normalizacji takiej samej jak w przypadku badań doświadczalnych (największa wartość dla każdego wektora to 1). Na wykresach zaznaczono wszystkie punkty pomiarowe zarówno dla płyty żelbetowej jak i kształtownika stalowego. Wyniki

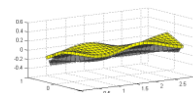


przeskalowano do geometrii układu belki zespolonej. Aby móc opracować formę graficzną wyników opracowano specjalny do tego celu program w systemie MATLAB. Poniżej przedstawiono porównanie otrzymanych doświadczalnie postaci drgań belki zespolonej C1 (kolor niebieski), z postaciami drgań otrzymanymi na podstawie obliczeń z modelu SES (kolor czerwony) z uwzględnieniem estymowanych parametrów (5.3). Jako pierwsze przedstawiono postacie drgań giętnych Rys. 5.1.

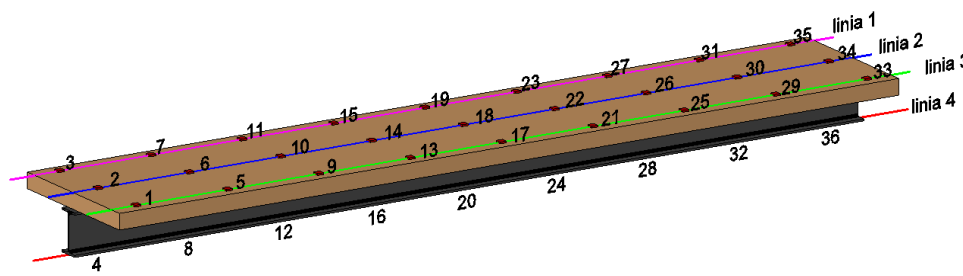


Rys. 5.1 Porównanie doświadczalnych i obliczeniowych formy drgań giętnych – belka C1:
a) $\varphi_{1g}^{exp} / \varphi_{1g}^{num}$; b) $\varphi_{2g}^{exp} / \varphi_{2g}^{num}$; c) $\varphi_{3g}^{exp} / \varphi_{3g}^{num}$

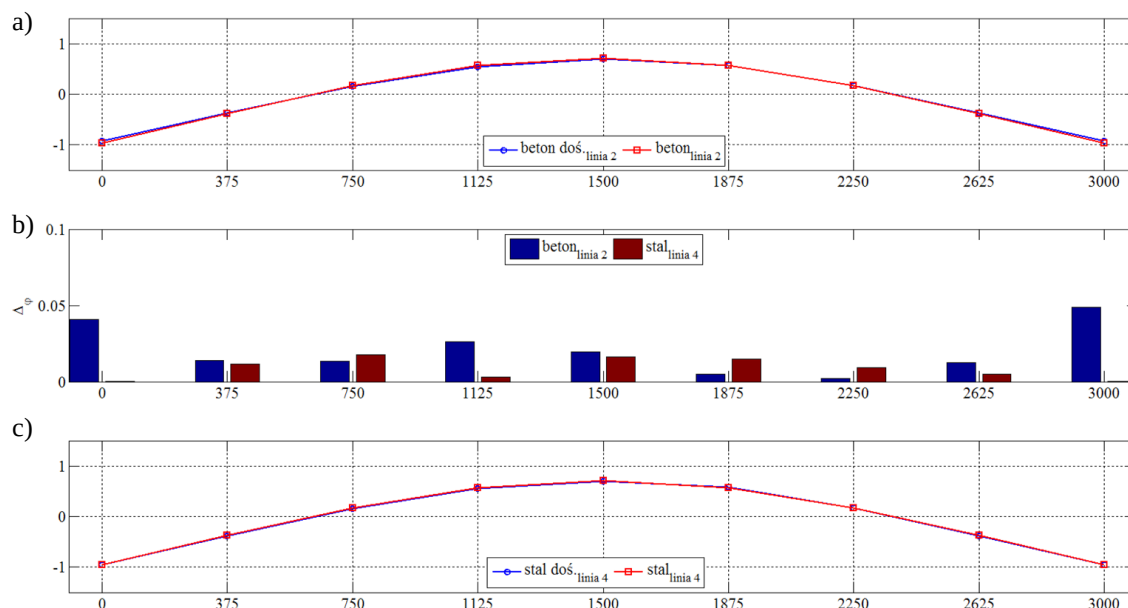
Postanowiono przyjrzeć się dokładniej postacią drgań własnych i dokonano dokładnego porównania mierząc odległość jaka powstała pomiędzy przemieszczeniem się postaci w danym punkcie podczas badań doświadczalnym, a przemieszczeniem otrzymanym w modelu SES. Odległość tą oznaczono symbolem Δ_φ . Całość belki podzielono na cztery rzędy czujników nazywając je kolejno linia 1, linia 2 i linia 3 są to linie stworzone z punktów pomiarowych znajdujących się na płycie żelbetowej oraz linia 4 składająca się z punktów pomiarowych umieszczonych na pasie dolnym kształtownika stalowego (Rys. 5.2). Na wykresach (Rys. 5.3, Rys. 5.4 i Rys. 5.5) zestawiono porównanie trzech postaci drgań doświadczalnych i obliczeniowych dla lini 2 i 4. Są to



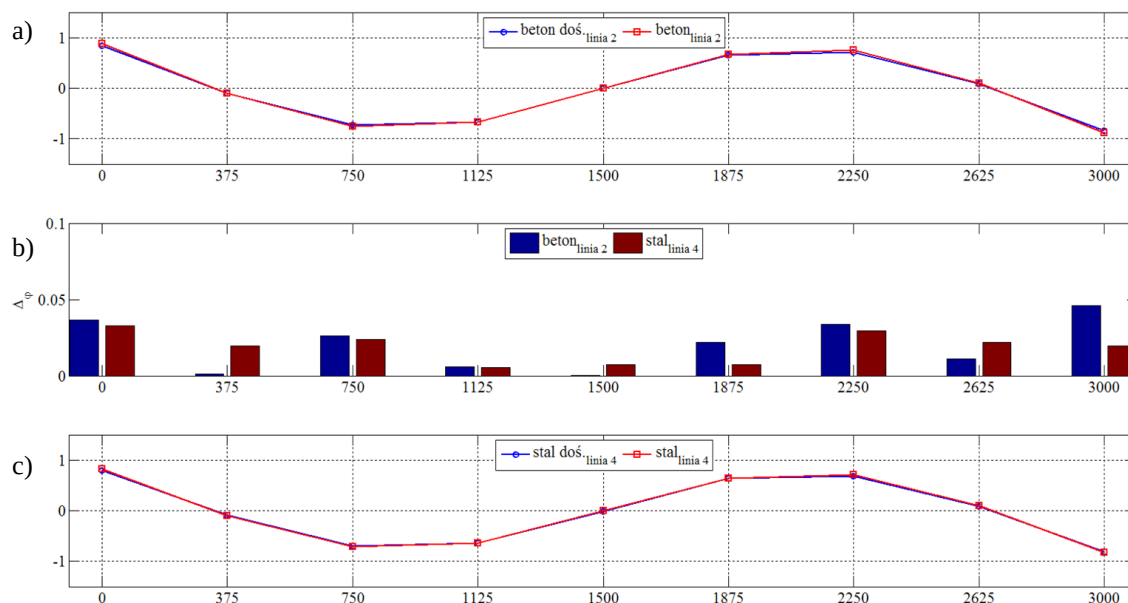
postacie form drgań giętnych. Porównując odchylenia $\Delta\varphi$ są one niewielkie, największe zaobserwowano dla trzeciej postaci drgań własnych dla punktów skrajnych.



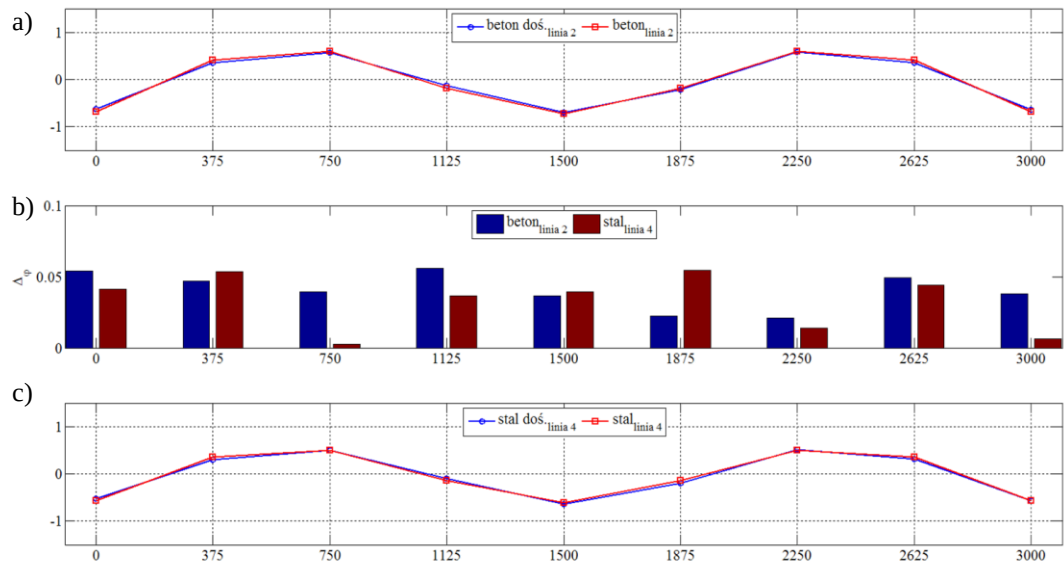
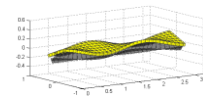
Rys. 5.2 Podział na linie pomiarowe (opis w tekście)



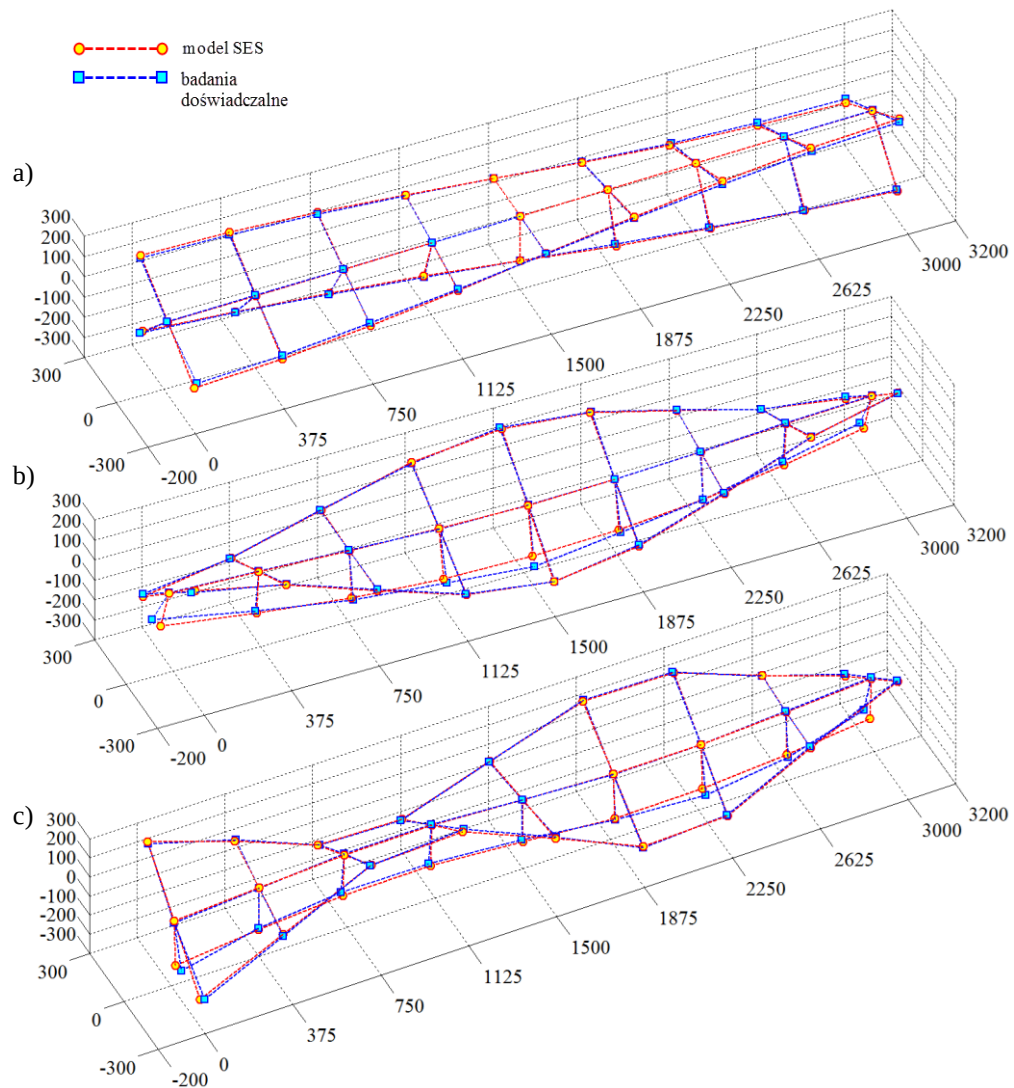
Rys. 5.3 Porównanie pierwszej formy drgań giętnych doświadczalnej i obliczeniowej – belka C1: a) 2 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci $\Delta\varphi$; c) 4 linia punktów pomiarowych leżących na kształtowniku stalowym



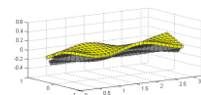
Rys. 5.4 Porównanie drugiej formy drgań giętnych doświadczalnej i obliczeniowej – belka C1: a) 2 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci $\Delta\varphi$; c) 4 linia punktów pomiarowych leżących na kształtowniku stalowym



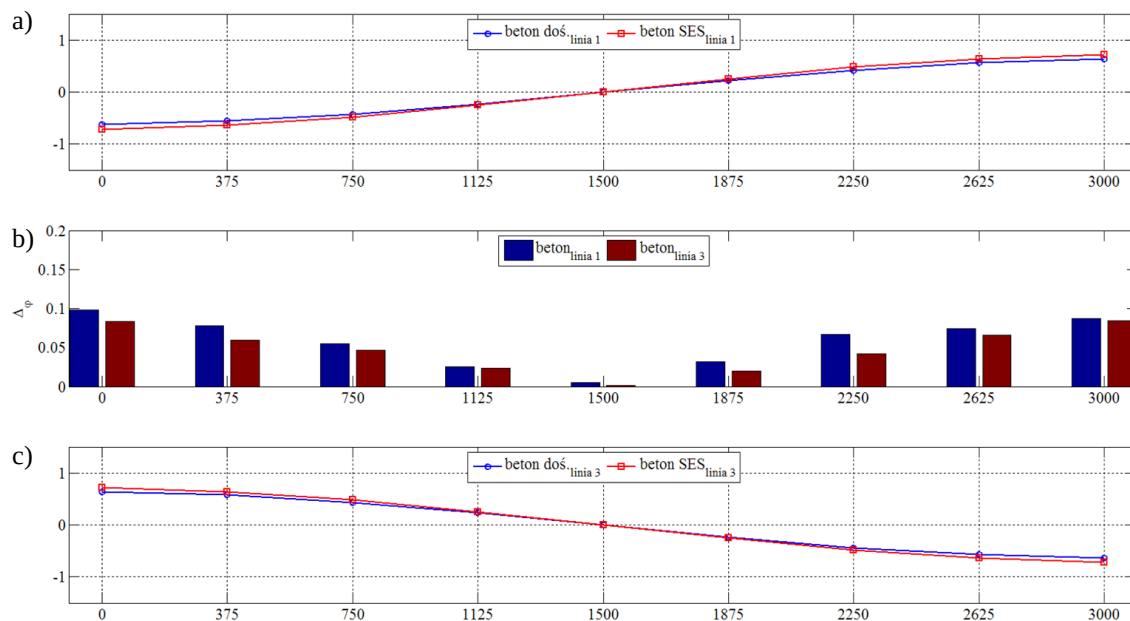
Rys. 5.5 Porównanie trzeciej formy drgań giętej doświadczalnej i obliczeniowej – belka C1: a) 2 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci $\Delta\phi$; c) 4 linia punktów pomiarowych leżących na kształtowniku stalowym



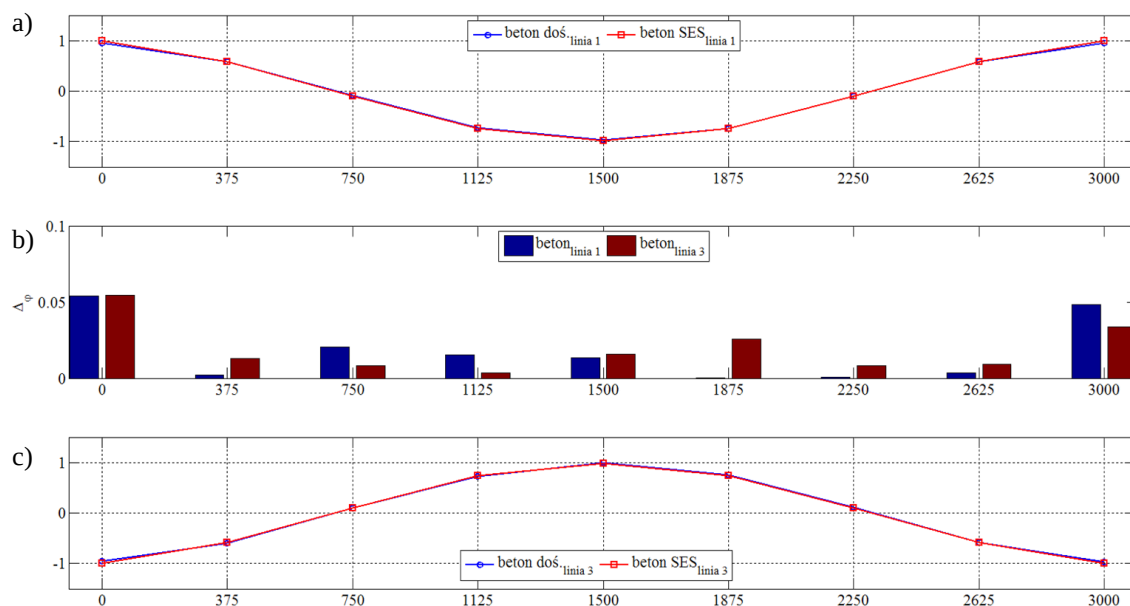
Rys. 5.6 Porównanie doświadczalnych i obliczeniowych formy drgań skrętnych – belka C1: a) $\phi_{1s}^{exp} / \phi_{1s}^{num}$; b) $\phi_{2s}^{exp} / \phi_{2s}^{num}$; c) $\phi_{3s}^{exp} / \phi_{3s}^{num}$



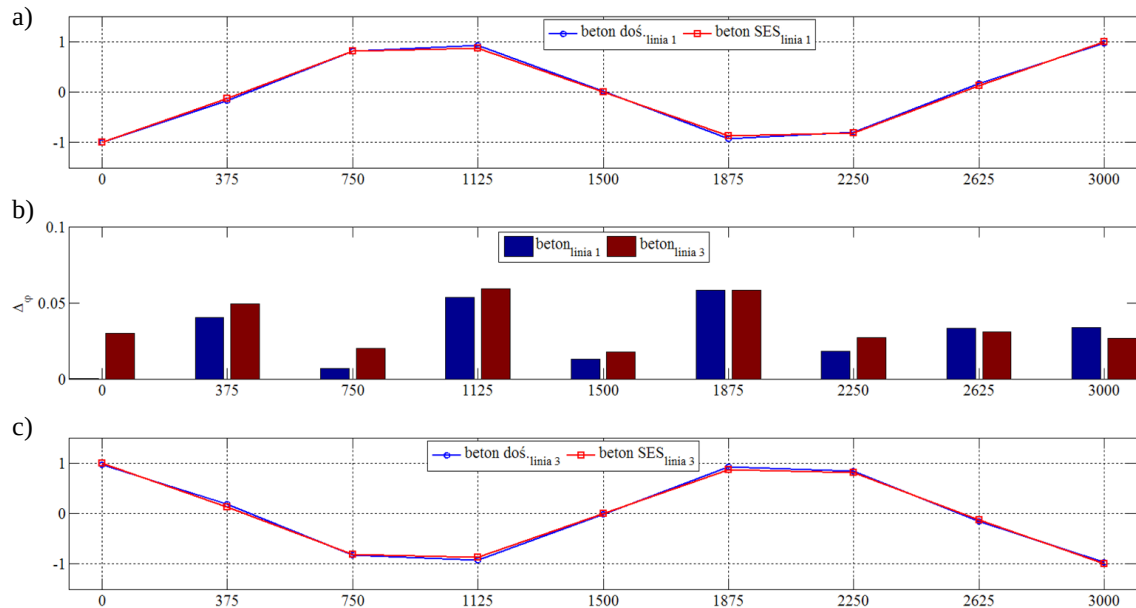
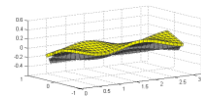
Kolejno przedstawiono postacie drgań skrętnych (Rys. 5.6), dla nich też postanowiono przeprowadzić dokładne porównanie, wykonano je dla linii punktów pomiarowych 1 i 3, są to punkty leżące na skraju płyty żelbetowej.



Rys. 5.7 Porównanie pierwszej formy drgań skrętnej doświadczalnej i obliczeniowej – belka C1: a) 1 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci $\Delta\varphi$; c) 3 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej

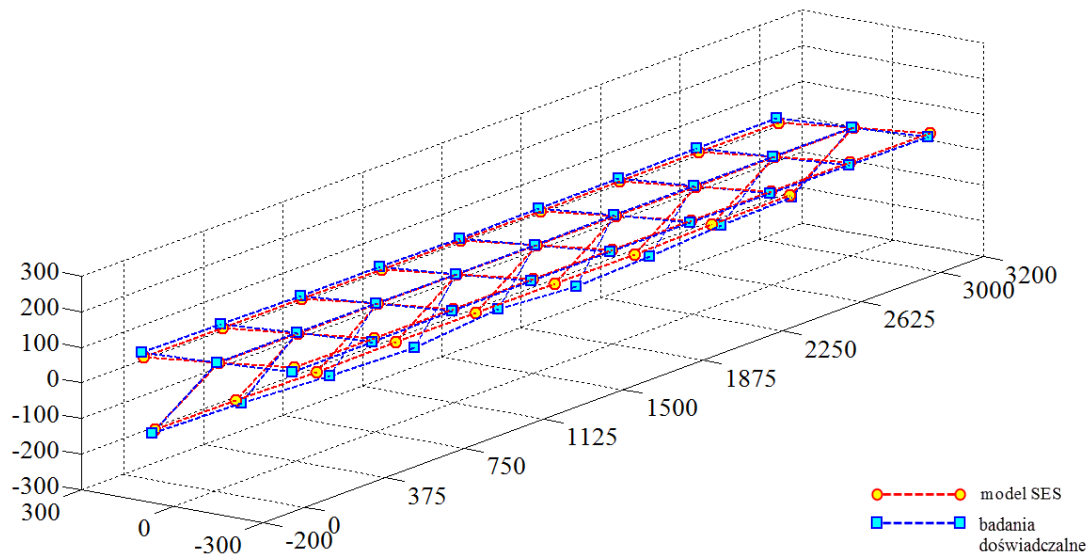


Rys. 5.8 Porównanie drugiej formy drgań skrętnej doświadczalnej i obliczeniowej – belka C1: a) 1 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci $\Delta\varphi$; c) 3 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej

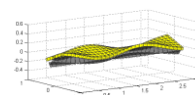


Rys. 5.9 Porównanie trzeciej formy drgań skrętnej doświadczalnej i obliczeniowej – belka C1: a) 1 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci $\Delta\phi$; c) 3 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej

Analizując dopasowanie postaci drgań doświadczalnych i obliczeniowych zarówno skrętnych jak i giętnych można zaobserwować dobre dopasowanie. Jednak przy dokładniejszym przeanalizowaniu postaci można zaobserwować odchylenia w dopasowaniu. Uwzględniając niedokładność pomiaru przyspieszeń otrzymane wyniki można je uznać za dobre. Dla porównania postanowiono zaobserwować dopasowanie obliczeniowej i doświadczalnej „zerowej” postaci drgań pasa dolnego (Rys. 5.10), której częstotliwość była uwzględniana podczas procesu estymacji jako ograniczenie równościowe (4.6). Obserwujemy także dobre dopasowanie „zerowej” postaci drgań własnych.



Rys. 5.10 Porównanie doświadczalnych ϕ_{0pd}^{exp} i obliczeniowych ϕ_{0pd}^{num} formy drgań pasa dolnego – belka C1



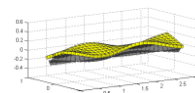
Dla pozostałych belek C2 i C3 przeprowadzono takie samo porównanie i zestawiono je w *Załączniku B*. Belka C2 (Rys. Z. 108 - Rys. Z. 116), belka C3 (Rys. Z. 117 - Rys. Z. 125).

Następnie przeprowadzono estymację parametrów według tego samego algorytmu przy zmienionych wagach ($w_f = 0,7$, $w_\varphi = 0,3$). W drugim podejściu starano się uzyskać dokładniejsze dopasowanie częstotliwości drgań własnych, a mniejsze postaci. Dla uzyskanych wyników wyznaczono pięć częstotliwości drgań własnych giętnych i skrętnych oraz po jednej częstotliwości drgań własnych pasa dolnego i osiowej. Dokonano porównania doświadczalnych i obliczeniowych częstości drgań dla wszystkich belek zespolonych i zestawiono je w tabeli 5.5 oraz wartości otrzymanych podczas estymacji wskaźników S , Z i J w tabeli 5.6.

Zaobserwowano bardzo dobre dopasowanie częstotliwości drgań własne dla wszystkich belek zespolonych. Największe różnice przy dopasowaniu częstotliwościowych drgań doświadczalnych i obliczeniowych odnotowano dla formy drgań skrętnych dla belki C1 f_{5s} ($\sim 2\%$), dla formy drgań giętnych także dla belki C1 f_{5g} ($\sim 2\%$) oraz dla formy drgań osiowych dla belki C2 ($\sim 3\%$). Obserwując wskazania wskaźników S , Z i J najlepsze dopasowanie uzyskano dla belki C1, porównując zarówno składowe S i Z jak i wskaźnik globalny J .

Tabela 5.5 Zestawienie wyników estymowanych parametrów K_h , K_v , $K_{R,X}$, E_c oraz porównanie doświadczalnych f_i^{exp} i obliczeniowych f_i^{num} częstości drgań, belki zespolone C1, C2 i C3

	BELKA C1			BELKA C2			BELKA C3		
i	f_i^{exp} [Hz]	f_i^{num} [Hz]	Δ [%]	f_i^{exp} [Hz]	f_i^{num} [Hz]	Δ [%]	f_i^{exp} [Hz]	f_i^{num} [Hz]	Δ [%]
1_s	64,24	63,70	-0,8	64,55	63,37	-1,8	66,35	64,63	-2,6
2_s	143,66	143,05	-0,4	143,06	142,31	-0,5	146,60	145,32	-0,9
3_s	217,68	216,57	-0,5	216,90	215,38	-0,7	221,42	220,43	-0,4
4_s	299,75	297,97	-0,6	298,18	296,00	-0,7	302,83	303,44	0,2
5_s	387,92	381,57	-1,6	383,97	385,48	0,4	394,70	395,61	0,2
1_g	73,38	74,18	1,1	73,59	73,80	0,3	75,37	75,71	0,5
2_g	167,41	165,42	-1,2	166,03	164,43	-1,0	174,82	172,62	-1,3
3_g	262,02	262,83	0,3	262,24	263,15	0,3	277,68	278,09	0,1
4_g	356,48	356,43	0,0	356,25	359,57	0,9	378,80	382,33	0,9
5_g	446,75	439,87	-1,5	456,09	455,66	-0,1	485,53	487,03	0,3
1_o	567,30	577,22	1,7	559,64	575,76	2,9	573,08	587,28	2,5
0_{pd}	92,04	92,04	0,0	92,87	92,87	0,0	95,38	95,38	0,0
K_h [N/m]	2,926E+08			1,777E+08			2,109E+08		
K_v [N/m]	2,537E+08			3,099E+08			3,903E+08		
$K_{R,X}$ [Nm/m]	4,961E+03			3,718E+03			2,627E+03		
E_c [N/m ²]	2,798E+10			2,760E+10			2,879E+10		

Tabela 5.6 Zestawienie wyników wskaźników S , Z i J , dla belek zespolonych C1, C2 i C3

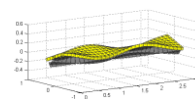
Wskaźnik	BELKA C1	BELKA C2	BELKA C3
S_{fs}	1,511E-04	4,820E-04	7,731E-04
S_{fg}	3,135E-04	2,004E-04	2,779E-04
S_{fo}	3,061E-04	8,296E-04	6,134E-04
S	7,706E-04	1,512E-03	1,664E-03
w_f	0,7	0,7	0,7
Z_{fs}	3,459E-03	3,319E-03	3,421E-03
Z_{fg}	6,127E-03	7,150E-03	2,523E-02
Z	9,586E-03	1,047E-02	2,865E-02
w_φ	0,3	0,3	0,3
J	3,415E-03	4,199E-03	9,760E-03

Porównanie postaci drgań własnych dokonano po wykonaniu wszystkich estymacji i przedstawiono w dalszej części pracy.

Ostatnią estymację według *algorytmu I* przeprowadzono dla wag umożliwiających bardziej dopasować współczynnik MAC ($w_f = 0,3$ oraz $w_\varphi = 0,7$). Wyniki zaprezentowano w tabeli 5.7 oraz tabeli 5.8.

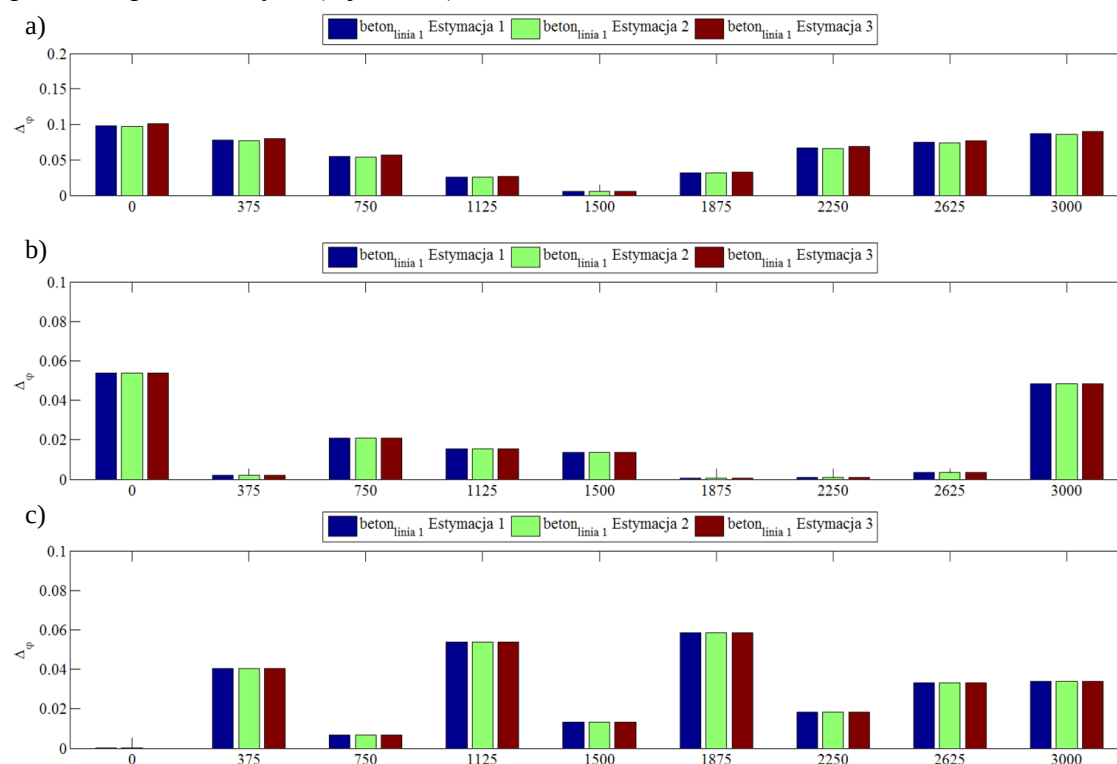
Tabela 5.7 Zestawienie wyników estymowanych parametrów K_h , K_v , $K_{R,X}$, E_c oraz porównanie doświadczalnych f_i^{exp} i obliczeniowych f_i^{num} częstości drgań, belki zespolone C1, C2 i C3

	BELKA C1			BELKA C2			BELKA C3		
i	f_i^{exp} [Hz]	f_i^{num} [Hz]	Δ [%]	f_i^{exp} [Hz]	f_i^{num} [Hz]	Δ [%]	f_i^{exp} [Hz]	f_i^{num} [Hz]	Δ [%]
1 _s	64,24	63,53	-1,1	64,55	63,19	-2,1	66,35	64,16	-3,3
2 _s	143,66	142,65	-0,7	143,06	141,89	-0,8	146,60	144,17	-1,7
3 _s	217,68	215,93	-0,8	216,90	214,69	-1,0	221,42	218,59	-1,3
4 _s	299,75	297,07	-0,9	298,18	295,04	-1,1	302,83	300,86	-0,6
5 _s	387,92	381,57	-1,6	383,97	384,22	0,1	394,70	392,24	-0,6
1 _g	73,38	74,09	1,0	73,59	73,61	0,0	75,37	75,85	0,6
2 _g	167,41	165,46	-1,2	166,03	164,16	-1,1	174,82	173,60	-0,7
3 _g	262,02	263,96	0,7	262,24	264,01	0,7	277,68	279,72	0,7
4 _g	356,48	359,43	0,8	356,25	362,69	1,8	378,80	384,22	1,4
5 _g	446,75	439,87	-1,5	456,09	461,24	1,1	485,53	488,86	0,7
1 _o	567,30	576,46	1,6	559,64	574,81	2,7	573,08	583,46	1,8
0 _{pd}	92,04	92,04	0,0	92,87	92,87	0,0	95,38	95,38	0,0
K_h [N/m]	2,855E+08			1,699E+08			2,351E+08		
K_v [N/m]	3,029E+08			4,119E+08			4,521E+08		
$K_{R,X}$ [Nm/m]	4,962E+03			3,721E+03			2,630E+03		
E_c [N/m ²]	2,781E+10			2,742E+10			2,830E+10		

Tabela 5.8 Zestawienie wyników wskaźników S , Z i J , dla belek zespolonych C1, C2 i C3

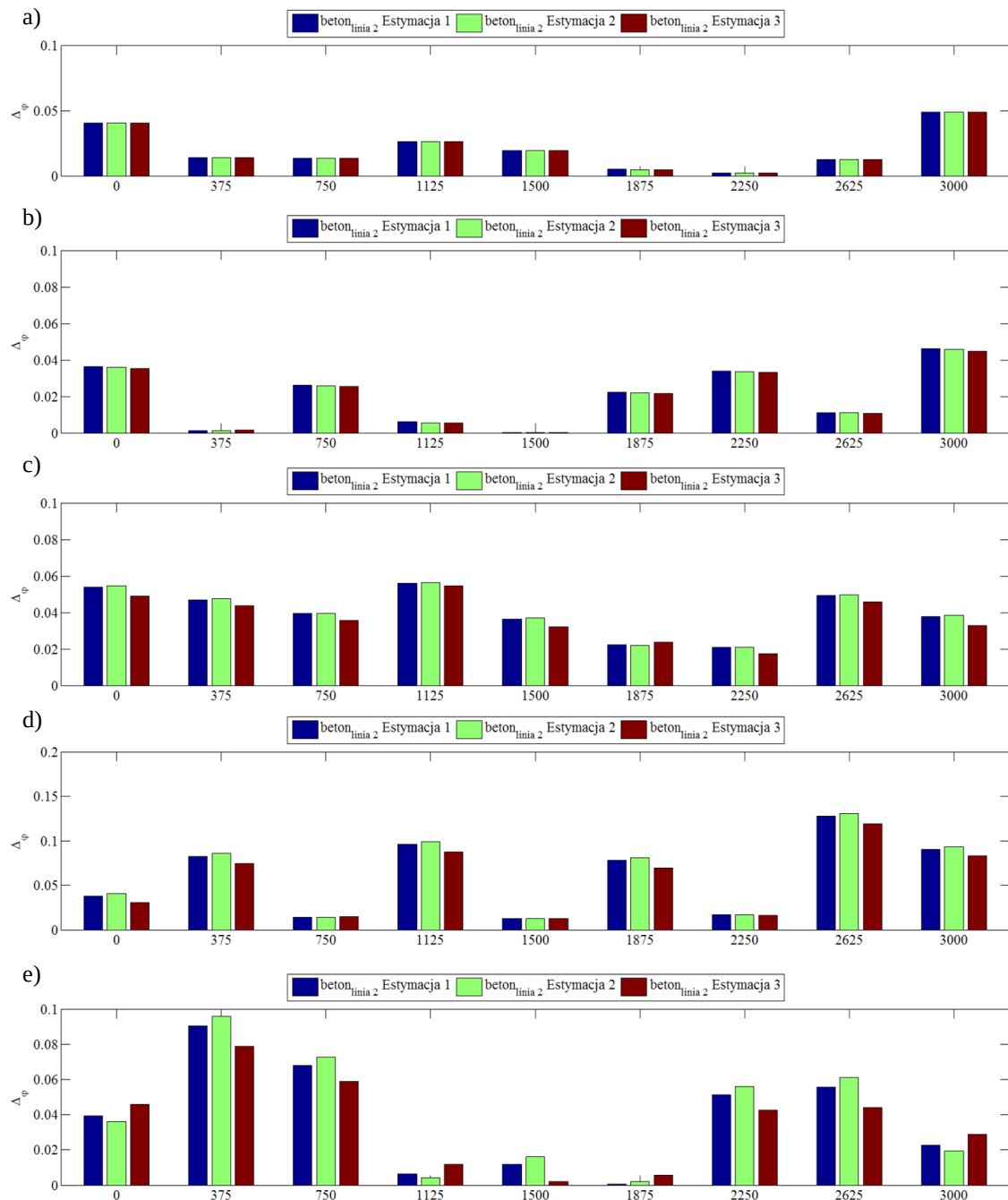
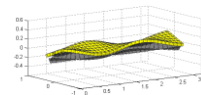
Wskaźnik	BELKA C1	BELKA C2	BELKA C3
S_{fs}	3,210E-04	7,291E-04	1,608E-03
S_{fg}	6,491E-04	6,261E-04	3,955E-04
S_{fo}	2,608E-04	7,348E-04	3,279E-04
S	1,231E-03	2,090E-03	2,331E-03
w_f	0,3	0,3	0,3
Z_{fs}	3,462E-03	3,319E-03	3,422E-03
Z_{fg}	5,707E-03	6,638E-03	2,461E-02
Z	9,169E-03	9,957E-03	2,803E-02
w_φ	0,7	0,7	0,7
J	6,787E-03	7,597E-03	2,032E-02

Dla wszystkich trzech przeprowadzonych estymacji dla belki C1, wykonano porównanie dopasowania postaci drgań doświadczalnych i obliczeniowych na podstawie modelu numerycznego. Wykonano to za pomocą porównania wielkości parametru Δ_φ dla form skłonnych linia 1 punktów pomiarowych (Rys. 5.11), a dla form giętnych linia 2 punktów pomiarowych (Rys. 5.12).



Rys. 5.11 Porównanie dopasowania postaci drgań skłonnych $\Delta_{\varphi,s}$ dla Estymacji 1, 2 i 3 – belka C1:
a) $\Delta_{\varphi,1s}$; b) $\Delta_{\varphi,2s}$; c) $\Delta_{\varphi,3s}$

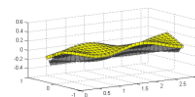
Jak możemy zaobserwować, proces estymacji na dopasowanie postaci drgań skłonnych, nie ma dużego wpływu. Aby porównywać i dopasowywać je w dokładniejszy sposób należałoby wprowadzić nowe kryterium.



Rys. 5.12 Porównanie dopasowania postaci drgań giętych $\Delta\varphi,g$ dla Estymacji 1, 2 i 3 – belka C1:
a) $\Delta\varphi_{1g}$; b) $\Delta\varphi_{2g}$; c) $\Delta\varphi_{3g}$; d) $\Delta\varphi_{4g}$; e) $\Delta\varphi_{5g}$

Obserwując zmiany w dopasowaniu postaci drgań giętych, jak spodziewano się, najmniejsze różnice parametru $\Delta\varphi$ uzyskano dla estymacji 3 gdzie współczynniki wag wynosił ($w_f = 0,3$ oraz $w_\varphi = 0,7$) co umożliwiło ustawić większą wagę dla wskaźnika Z (4.4) odpowiedzialnego za dopasowanie postaci drgań własnych. Różnice w dopasowaniu obserwuje się w wyższych formach drgań giętych (od 3 do 5), dla pierwszych dwóch różnice w dopasowaniu są niezauważalne.

Dla pozostałych belek C2 i C3 porównanie to zestawiono w *Załączniku B* odpowiednio dla pierwszej belki (Rys. Z. 126, Rys. Z. 127), a dla drugiej belki zespolonej (Rys. Z. 128, Rys. Z. 129).



Otrzymane wartości parametrów (K_h , K_v , $K_{R,X}$ i E_c) w procesie przeprowadzonych trzech estymacji zestawiono w formie tabeli 5.9 oraz różnice procentowe dla uzyskiwanych parametrów w wyniku prowadzonych estymacji w tabeli 5.10.

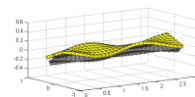
Tabela 5.9 Zestawienie wyników estymowanych parametrów K_h , K_v , $K_{R,X}$, E_c dla trzech estymacji, dla belek zespolonych C1, C2 i C3

PARAMETR	ESTYMACJA 1 $w_f=0,5$, $w_j=0,5$			ESTYMACJA 2 $w_f=0,7$, $w_j=0,3$			ESTYMACJA 3 $w_f=0,3$, $w_j=0,7$		
	C1	C2	C3	C1	C2	C3	C1	C2	C3
K_h [N/m]	2,81E+08	1,73E+08	2,18E+08	2,93E+08	1,78E+08	2,11E+08	2,86E+08	1,70E+08	2,35E+08
K_v [N/m]	2,71E+08	3,49E+08	3,99E+08	2,54E+08	3,10E+08	3,90E+08	3,03E+08	4,12E+08	4,52E+08
$K_{R,X}$ [Nm/m]	4,96E+03	3,72E+03	2,63E+03	4,96E+03	3,72E+03	2,63E+03	4,96E+03	3,72E+03	2,63E+03
E_c [N/m ²]	2,79E+10	2,75E+10	2,87E+10	2,80E+10	2,76E+10	2,88E+10	2,78E+10	2,74E+10	2,83E+10

Tabela 5.10 Zestawienie wyników estymowanych parametrów K_h , K_v , $K_{R,X}$, E_c dla trzech estymacji, dla belek zespolonych C1, C2 i C3

	ESTYMACJA 1/ ESTYMACJA 2			ESTYMACJA 2/ ESTYMACJA 3			ESTYMACJA 1/ ESTYMACJA 3		
	C1	C2	C3	C1	C2	C3	C1	C2	C3
ΔK_h [%]	-4,20	-2,87	3,21	2,41	4,41	-11,47	-1,69	1,66	-7,89
ΔK_v [%]	6,39	11,20	2,26	-19,39	-32,93	-15,84	-11,75	-18,04	-13,22
$\Delta K_{R,X}$ [%]	0,01	0,02	0,01	-0,01	-0,06	-0,09	0,00	-0,04	-0,08
ΔE_c [%]	-0,14	-0,24	-0,29	0,61	0,66	1,71	0,47	0,42	1,43

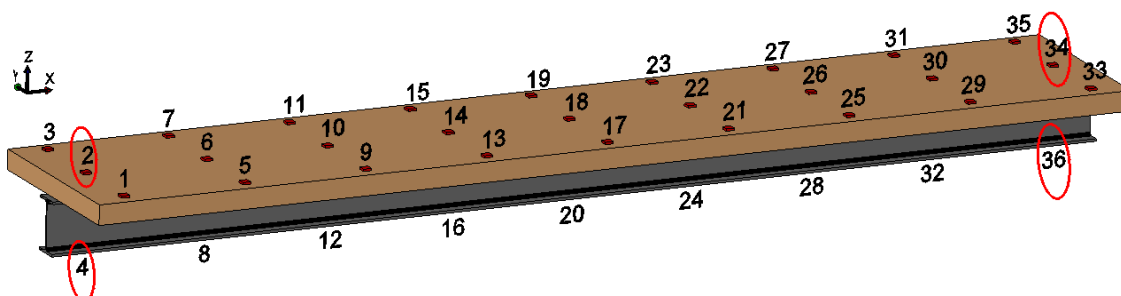
Zaobserwowano, że wartości parametrów $K_{R,X}$ i E_c nie ulegają znaczącym zmianom bez względu na przyjęte wagi dopasowania. Maksymalna różnica pomiędzy uzyskanymi wartościami wyestymowanego parametru $K_{R,X}$ to mniej niż 0,5% dla wszystkich badanych belek zespolonych. Dla parametru E_c największą różnicę odnotowano dla belki C3 i jest to wartość mniejsza niż 2%, dla pozostałych belek różnica pomiędzy uzyskiwanymi wartościami jest mniejsza niż 1%. Zmianie za to ulegają wartości parametrów połączenia K_h i K_v , ich różnice w przypadku belki C2 są znaczące i wynoszą nawet 33 % K_v oraz 20% dla belki C1 dla parametru K_h . Pokazuje to jak dużą rolę w prowadzeniu identyfikacji ma wybór kryterium i wag, jak ważne jest uwzględnienie w procesie estymacji parametrów postaci drgań, to ich dopasowywanie ma bardzo duże znaczenie dla uzyskanych wartości parametrów K_h i K_v .



5.2. Estymacja parametrów modelu belki zespolonej – algorytm identyfikacji II

Podczas estymacji parametrów (K_h , K_v , E_c i η_c , η_z) według *algorytmu identyfikacji II* dane przyjęte do modelu SES zestawiono w tabeli 5.1 oraz w tabeli 5.2. Moduł sprężystości poprzecznej stali i betonu wyznaczono jak poprzednio na podstawie wzoru (5.1). Wartość współczynnika strat dla betonu η_c i zespolenia η_z , obliczane w procesie estymacji, uzależniona jest od częstotliwości, temperatury i innych czynników. Współczynnik strat dla betonu zmienia się w zakresie od $2 \cdot 10^{-4}$ do $6 \cdot 10^{-4}$ według [12]. Różnorodność tego materiału powoduje duży rozrzut wartości tłumienia betonu. Tłumienie zależy od gęstości betonu, ilości zaczynu cementowego, historii obciążenia, poziomu naprężeń. Przy ustalaniu wartości współczynnika strat dla zespolenia literatura nie dostarcza szczegółowych danych.

W pierwszym etapie poszukiwań parametrów modelu obliczeniowego zastosowano kryterium (4.20) przy uwzględnieniu podczas estymacji jedynie punktów pomiarowych znajdujących się w osi środkowej (na płycie żelbetowej – punkty 2, 34 i na kształtowniku stalowym – punkty 4, 36, Rys. 5.13). Zastosowano wymuszenie w punkcie 2 na kierunku osi Z. Z każdego przebiegu podczas procesu estymacji parametrów uwzględniano 3 częstotliwości rezonansowe po 8 punktów z okolicy amplitudy. Powodowało to uwzględnienie jedynie form drgań giętnych (punkty 2, 4, 34 i 36). Poniżej w tabeli 5.11 przedstawiono wyniki dla *ESTYMACJI 1* dla belki C1.

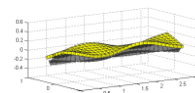


Rys. 5.13 Belka zespolona z zaznaczonymi punktami z doświadczeń. Estymacja 1 (opis w tekście)

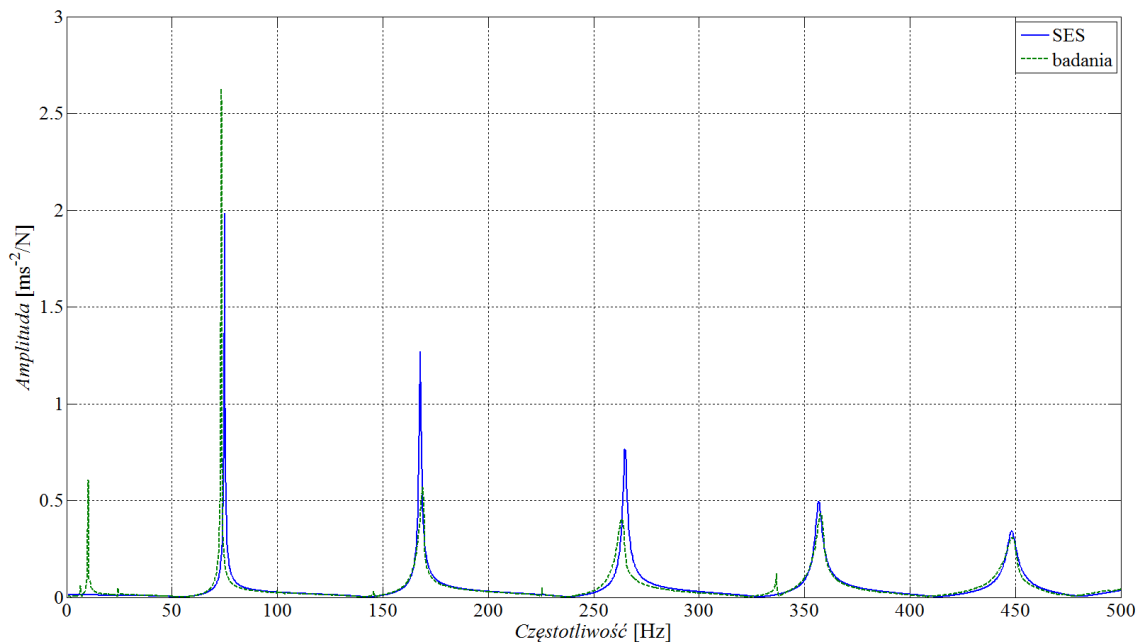
Dla wyestymowanych wartości wyznaczono przebiegi amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia dla modelu SES, dla punktów z osi belki 2 i 34 (punkty użyte podczas estymacji). Obliczenia dokonano dla wymuszenia w punkcie 2 na kierunku osi Z, a odpowiedzi odczytywano w wybranych punktach na kierunku osi Z.

Tabela 5.11 Zestawienie wyników estymowanych parametrów K_h , K_v , E_c i η_c , η_z dla *ESTYMACJI 1*, dla belki zespolonej C1

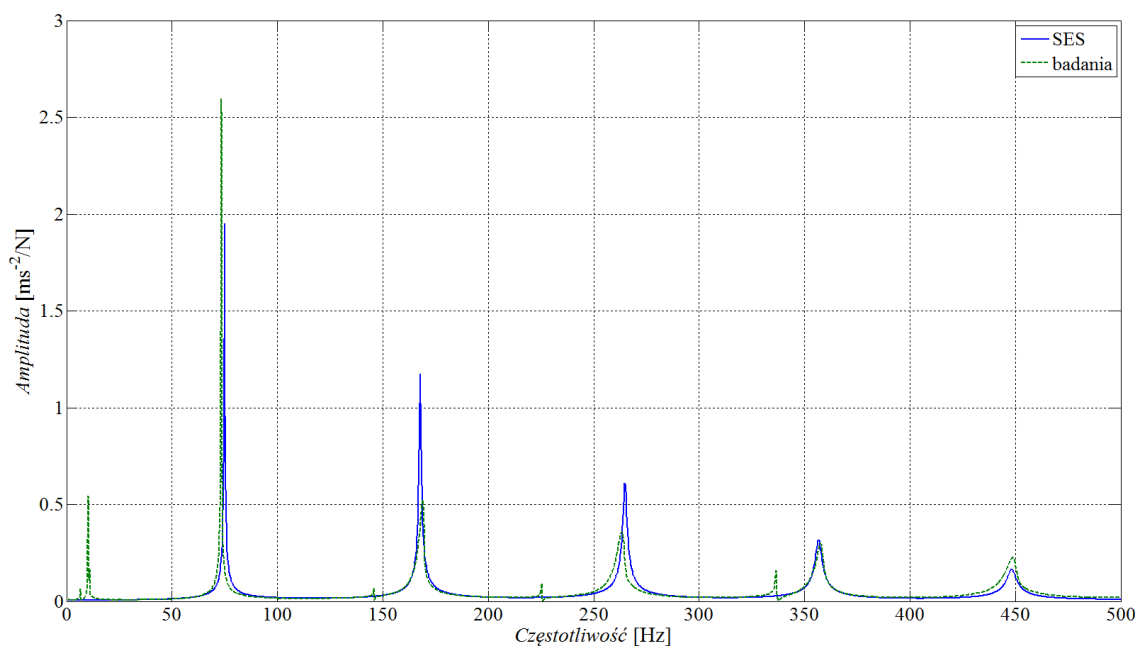
WYMUSZENIE	2-Z					
PUNKTY POMIAROWE (KIERUNEK)	2 Z, 4Z, 34 Z, 36 Z					
PARAMETR	K_h [N/m]	K_v [N/m]	E_c [N/m ²]	η_c [-]	η_z [-]	J_{FRF}
ESTYMACJA 1	3,671E+08	2,160E+08	2,835E+10	0,0142	0,0076	0,0350



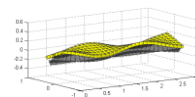
Wykresy przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia dla modelu SES porównano z tymi otrzymanymi na podstawie badań doświadczalnych (Rys. 5.14, Rys. 5.15). Uzyskanie takiego wykresu było możliwe poprzez opracowanie specjalnego programu w środowisku MATLAB. Program ten umożliwiał rysowanie wykresów przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia dla modelu SES badanej belki, dla wybranego wymuszenia (1-Z, 2-Z, 2+X), dla dowolnego punktu pomiarowego (przyjętego jak w przeprowadzonych badaniach doświadczalnych), na kierunku X, Y, Z.



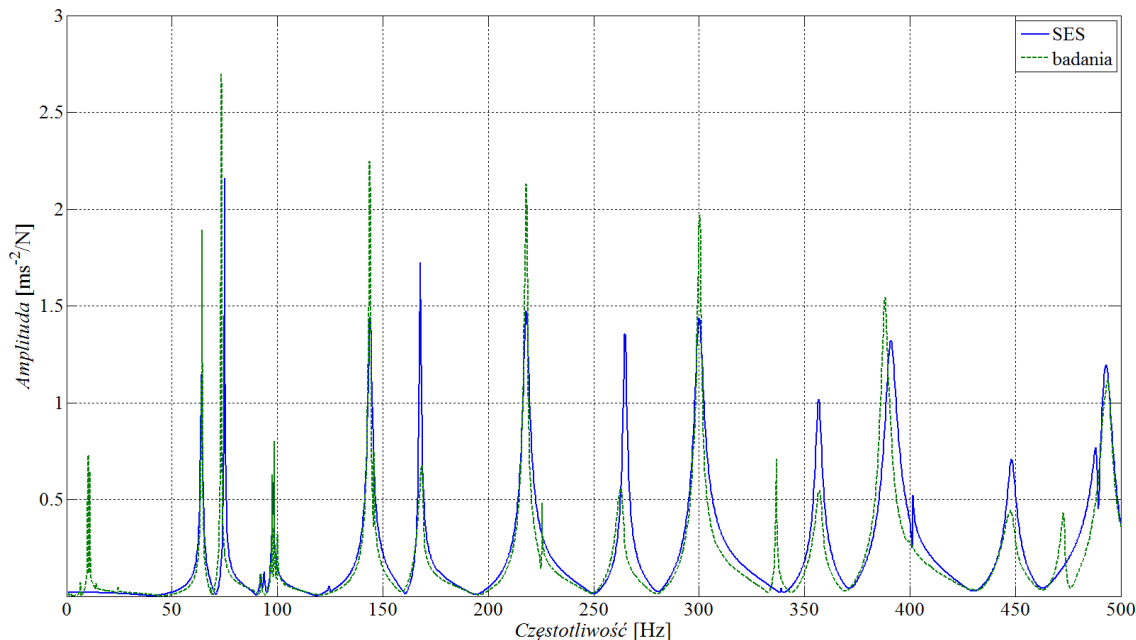
Rys. 5.14 Porównanie doświadczalnego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla belki zespolonej C1, wymuszenie 2-Z, punktu 2, kierunek Z



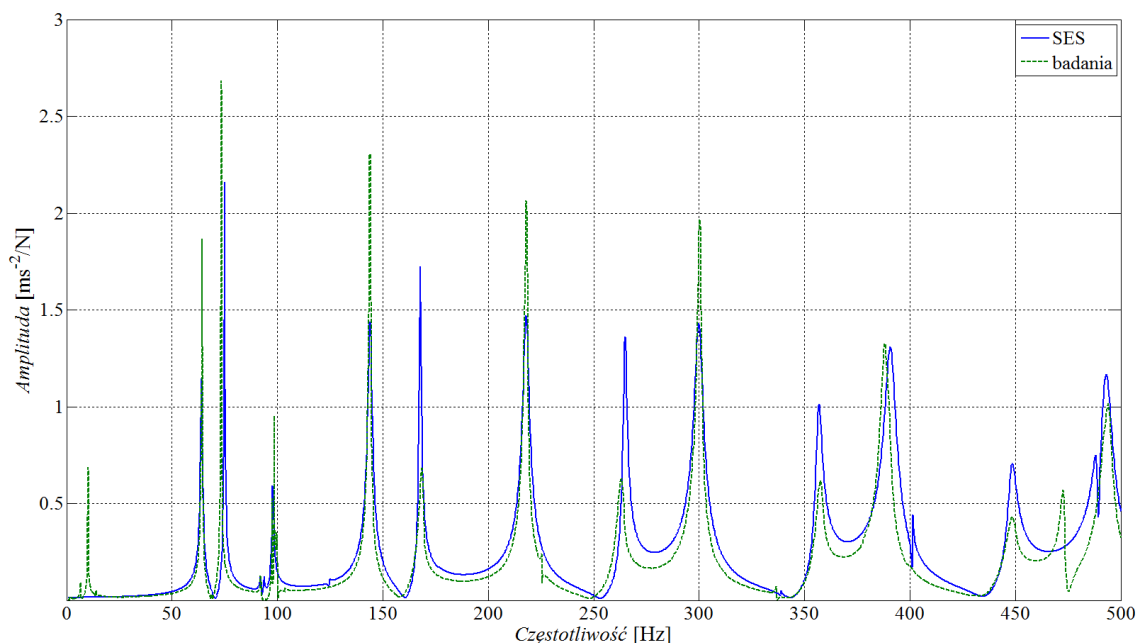
Rys. 5.15 Porównanie doświadczalnego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla belki zespolonej C1, wymuszenie 2-Z, punktu 36, kierunek Z



Następnie dla weryfikacji wyestymowanych wartości parametrów dokonano obliczeń dla modelu SES z użyciem otrzymanych parametrów, tym razem dla wymuszenia w punkcie 1, na kierunku Z. Odpowiedzi odczytano dla punktów 1 i 35, na kierunku Z. Wykonano porównania wykresów otrzymanych na podstawie badań doświadczalnych z tymi uzyskanymi na podstawie modelu SES (Rys. 5.16, Rys. 5.17).

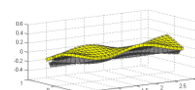


Rys. 5.16 Porównanie doświadczalnego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla belki zespolonej C1, wymuszenie 1-Z, punktu 1, kierunek Z

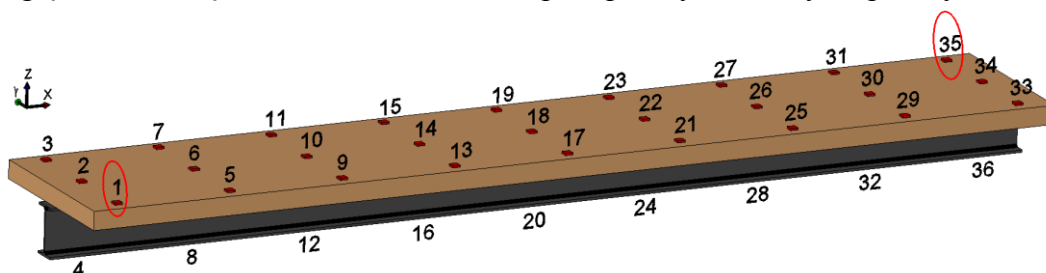


Rys. 5.17 Porównanie doświadczalnego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla belki zespolonej C1, wymuszenie 1-Z, punktu 35, kierunek Z

W wyniku przeprowadzonej estymacji otrzymano dobre dopasowanie przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla punktów z osi belki (2 i 34) oraz dla punktów skrajnych (1 i 33), zarówno dla wymuszenia użytego podczas estymacji parametrów, jak i wymuszenia użytego podczas weryfikacji.



W drugim etapie przeprowadzono *ESTYMACJĘ 2* przy zastosowaniu kryterium przy założeniu wymuszenia w punkcie 1 na kierunku osi Z, przy uwzględnieniu punktów z naroży 1 i 35 (Rys. 5.18). Z każdego przebiegu podczas procesu estymacji parametrów uwzględniano 3 częstotliwości rezonansowe po 4 punkty z okolicy amplitudy.



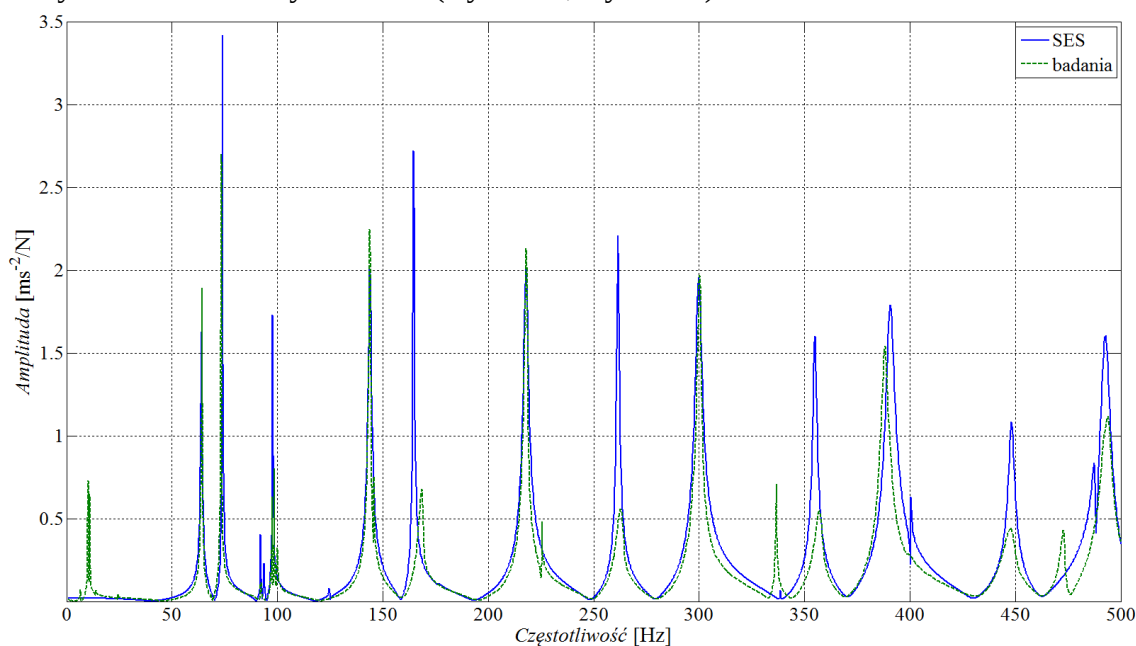
Rys. 5.18 Belka zespolona z zaznaczonymi punktami z doświadczeń. Estymacja 2 (opis w tekście)

Odpowiedzi odczytywano w wybranych punktach i porównywano na kierunku osi Z). Wyniki zaprezentowano w tabeli 5.12.

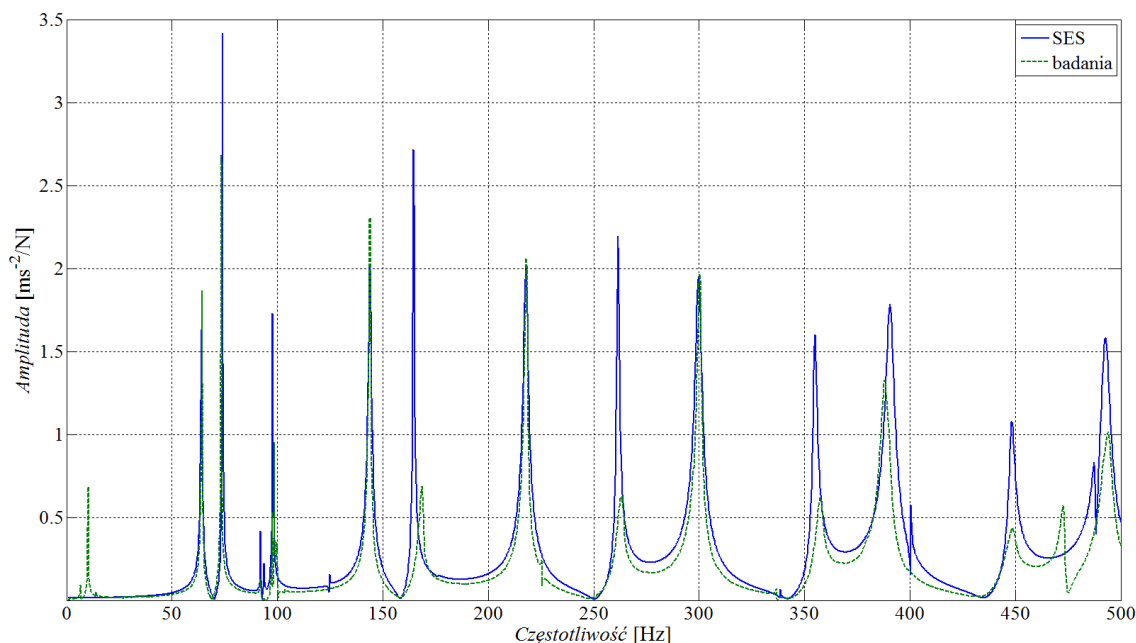
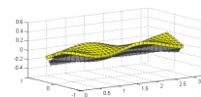
Tabela 5.12 Zestawienie wyników estymowanych parametrów K_h , K_v , E_c i η_c , η_z dla *ESTYMACJI 2*, dla belki zespolonej C1

WYMUSZENIE	1-Z					
PUNKTY POMIAROWE (KIERUNEK)	1 Z, 35 Z					
PARAMETR	K_h [N/m]	K_v [N/m]	E_c [N/m ²]	η_c [-]	η_z [-]	J_{FRF}
<i>ESTYMACJA 2</i>	2,703E+08	2,397E+08	2,832E+10	0,0105	0,0018	0,0079

Jak poprzednio sprawdzono poprawność wykonanych obliczeń porównując otrzymane przebiegi amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla modelu SES z tymi otrzymanymi na podstawie badań doświadczalnych. Najpierw dokonano porównania dla wymuszenia w punkcie 1 na kierunku osi Z, dla punktów 1 i 35 na tym samym kierunku co wymuszenie (Rys. 5.19, Rys. 5.20).



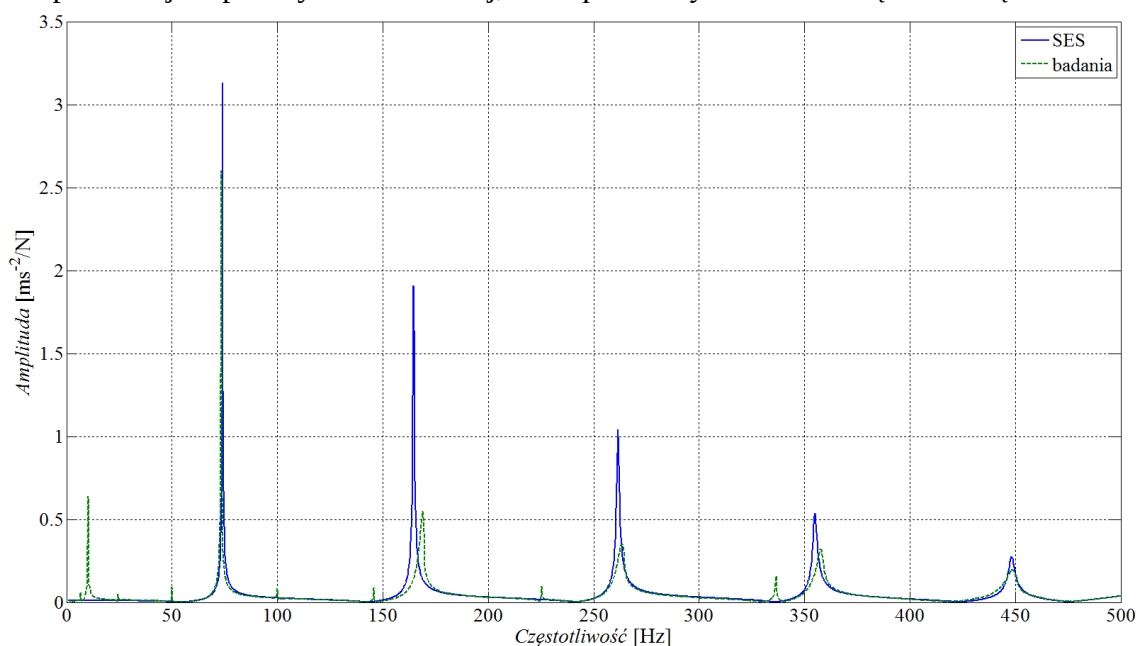
Rys. 5.19 Porównanie doświadczalnego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla belki zespolonej C1, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z



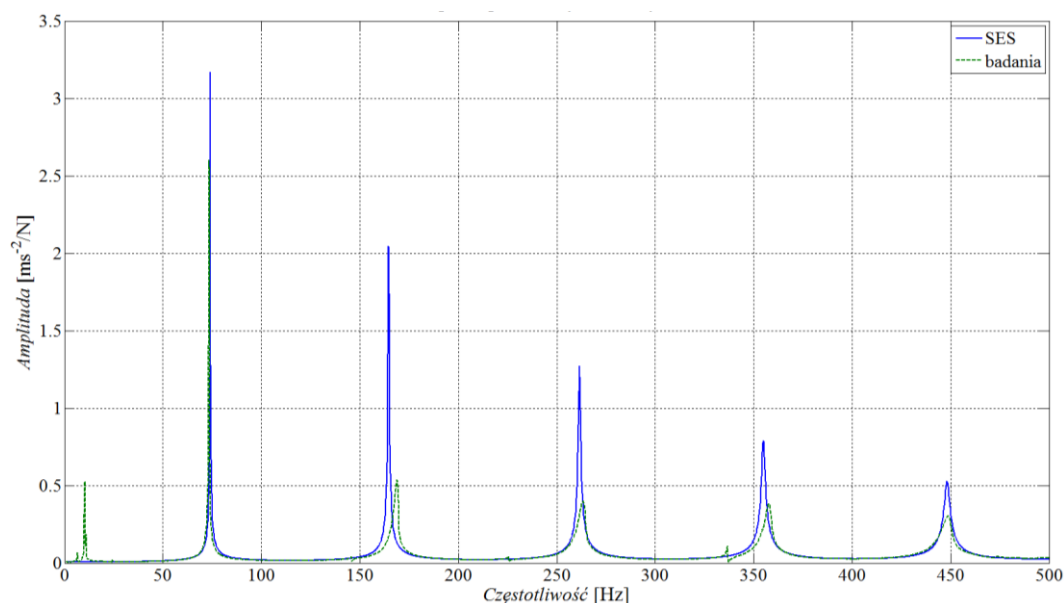
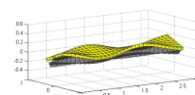
Rys. 5.20 Porównanie doświadczalnego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla belki zespolonej C1, wymuszenie 1-Z, punktu 35, kierunek Z

Następnie dokonano walidacji otrzymanych parametrów obliczając przebiegi amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla modelu SES dla wymuszenia w punkcie 2 na kierunku osi Z, dla punktów 4 i 34 (Rys. 5.21, Rys. 5.22).

Porównując otrzymane wykresy można zaobserwować, że zarówno te otrzymane dla wymuszenia 1-Z, jak i to otrzymane dla wymuszenia 2-Z są dobrze dopasowane pod względem charakteru danych amplitud i ich umiejscowienia. Różnią się jednak wartościami tych amplitud. Wartości amplitud dla wymuszenia 1-Z, są lepiej dopasowane niż dla wymuszenia 2-Z. Przy wymuszeniu 2-Z uzyskujemy dobre dopasowanie dla pierwszej amplitudy rezonansowej, a dla pozostałych wartości są dużo większe.

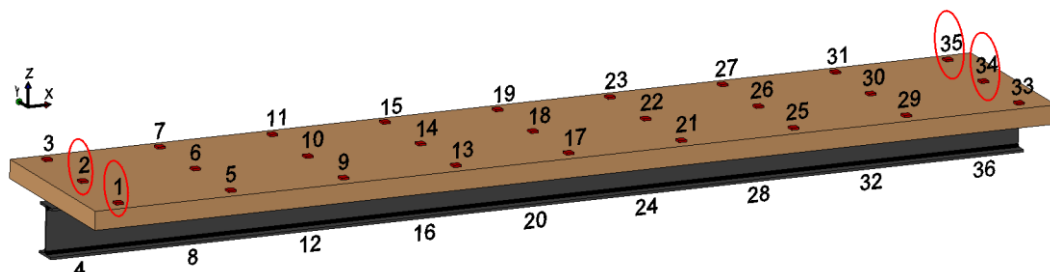


Rys. 5.21 Porównanie doświadczalnego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla belki zespolonej C1, wymuszenie 2-Z, punktu 4, kierunek Z



Rys. 5.22 Porównanie doświadczonego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla belki zespolonej C1, wymuszenie 2-Z, punkt 34, kierunek Z

W ostatnim etapie przeprowadzono estymację w której brano pod uwagę zarówno wymuszenie w punkcie 1, jak i w punkcie 2 oba na tym samym kierunku osi Z. Dla wymuszenie 1-Z przyjęto punkt 1 i 35, a dla wymuszenia 2-Z przyjęto punkty 2 i 34. Odpowiedzi odczytywano na kierunku osi Z (Rys. 5.23). Z każdego przebiegu podczas procesu estymacji parametrów uwzględniano 3 częstotliwości rezonansowe po 4 punkty z okolicy amplitudy.

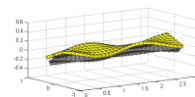


Rys. 5.23 Belka zespolona z zaznaczonymi punktami z doświadczeń. Estymacja 3 (opis w tekście)

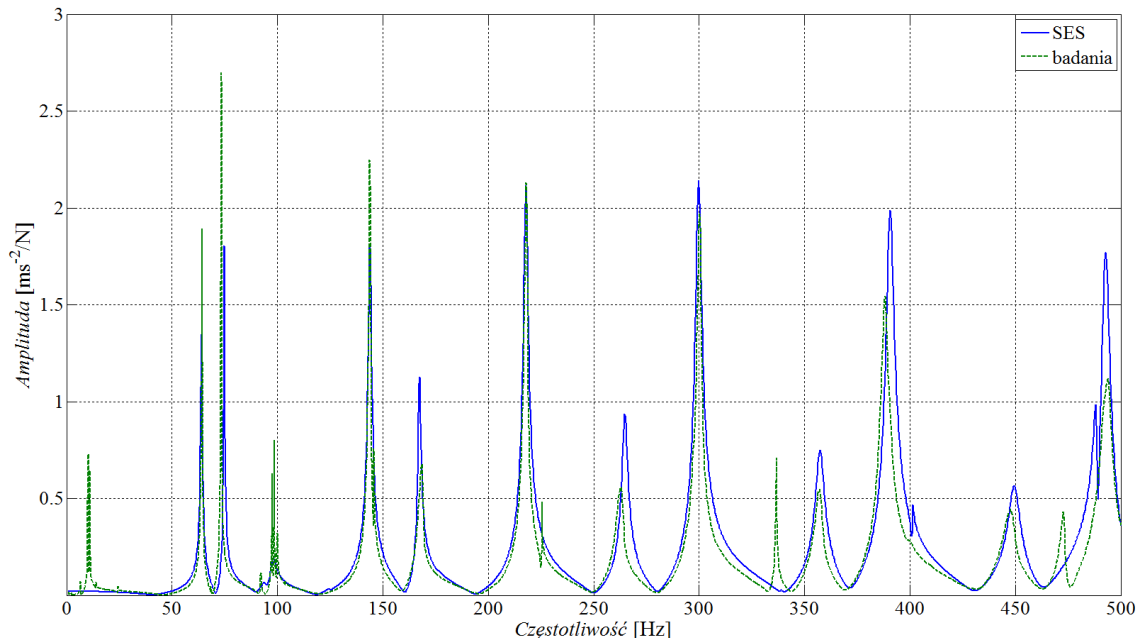
Wyniki *ESTYMACJI 3* zaprezentowano w tabeli 5.13. Wyniki uzyskano dla dwóch wymuszeń po dwa punkty (odpowiedzi) pomiarowe dla każdego wymuszenia. W efekcie uzyskano parametry sztywnościowe i tłumiące, które powinny dawać dobre dopasowanie przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla obydwóch punktów wymuszeń.

Tabela 5.13 Zestawienie wyników estymowanych parametrów K_h , K_v , E_c i η_c , η_z dla *ESTYMACJI 3*, dla belki zespolonej C1

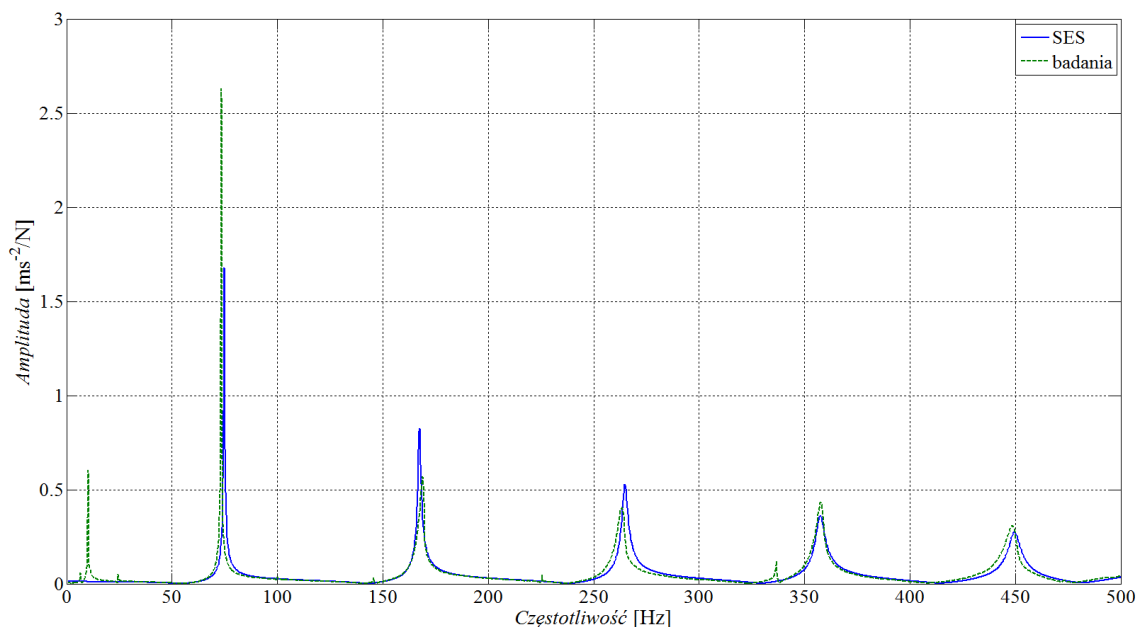
WYMUSZENIE	1-Z			2-Z		
PUNKTY POMIAROWE (KIERUNEK)	3 Z, 33 Z			2 Z, 34 Z		
PARAMETR	K_h [N/m]	K_v [N/m]	E_c [N/m ²]	η_c [-]	η_z [-]	J_{FRF}
ESTYMACJA 3	2,700E+08	2,455E+08	2,832E+10	0,0103	0,0100	0,1157



Jak poprzednio sprawdzono poprawność wykonanych obliczeń porównując otrzymane przebiegi amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla modelu SES z tymi otrzymanymi na podstawie badań doświadczalnych. Najpierw dokonano porównania dla wymuszenia w punkcie 1 na kierunku osi Z, dla punktów 1 i 35 na tym samym kierunku co wymuszenie (Rys. 5.19, Rys. 5.20).

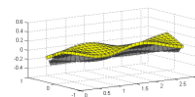


Rys. 5.24 Porównanie doświadczalnego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla belki zespolonej C1, wymuszenie 1-Z, punktu 1, kierunek Z



Rys. 5.25 Porównanie doświadczalnego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla belki zespolonej C1, wymuszenie 2-Z, punktu 2, kierunek Z

W wyniku przeprowadzonej estymacji otrzymano dobre dopasowanie przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla wymuszenia 1-Z oraz dla wymuszenia 2-Z. Uzyskano dość dobre dopasowanie wykresów co do miejsca rezonansów i charakteru



wykresu. Różnicę jaką uzyskano polegała na zbyt małych wartościach amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia.

Na podstawie przedstawionych wykresów można zaobserwować, że zarówno te otrzymane dla wymuszenia 1-Z, jak i to otrzymane dla wymuszenia 2-Z są dobrze dopasowane pod względem kształtu danych amplitud ich umiejscowienia. Różnią się jednak wartościami tych amplitud. Może być to spowodowane zbyt niskim tłumieniem betonu, stali lub zespolenia. Porównując wszystkie otrzymane wartości współczynników strat podczas trzech estymacji zauważono, że ich wartości są zbliżone.

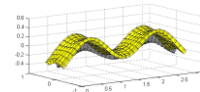
Dla pozostałych belek wyniki przedstawiono w *Załączniku A* (dla belki C2: Tabela Z.20 i belki C3: Tabela Z.21) oraz porównanie przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia otrzymanych dla modelu SES z badaniami doświadczalnymi w *Załączniku B* (belka C2: Rys. Z. 130 - Rys. Z. 133 dla belki C3: Rys. Z. 134 - Rys. Z. 137). Dla belki C2 obliczenia wykonano dla założeń z *ESTYMACJI 2*, a dla belki C3 przeprowadzono obliczenia dla założeń z *ESTYMACJI 1*.

6. Zastosowanie metody estymacji parametrów modeli do detekcji uszkodzeń – obliczenia symulacyjne

Diagnostyka stanu konstrukcji jest jednym z ważniejszych elementów w działalności inżynierskiej. Jednymi z częściej stosowanymi metodami do wykrywania uszkodzeń są metody analizy modalnej. Opracowana metoda estymacji parametrów może być efektywnie wykorzystana do wykrywania wielkości uszkodzenia. Zagadnieniu detekcji uszkodzeń w konstrukcjach zespolonych takich jak stalowo-betonowe belki zespolone poświęcona jest rozprawa doktorska M. Jarosińskiej „Detekcja uszkodzeń stalowo-betonowych belek zespolonych metodami analizy modalnej”(2014). W pracy tej dokonano analizy wybranych metod detekcji i lokalizacji uszkodzeń w stalowo-betonowych belkach zespolonych. Rozprawa doktorska omawiała metody detekcji uszkodzeń na podstawie zmian częstotliwości drgań własnych, kształtu postaci drgań własnych, krzywizny postaci drgań, współczynnika tłumienia modalnego oraz współczynnika transferu energii ETR (*ang. Energy Tranfrer Ratio*).

W rozdziale tym przedstawiono wykorzystanie opracowanego przestrzennego modelu SES (rozdział 3) oraz metody estymacji parametrów (rozdział 4.1) do wykrywania wielkości uszkodzenia. Analizowano uszkodzenia kołków stalowych zespalających płytę żelbetową z kształtownikiem stalowym. Estymację parametrów uszkodzonych prowadzono na podstawie częstotliwości i postaci drgań własnych, dlatego też zastosowano *Algorytm identyfikacji I*. Modelowanie uszkodzenia polegało na modyfikowaniu wartości współczynników sztywności w elementach sprężysto-tłumiących łączących SES-y opisujące płytę żelbetową z SES-ami opisującymi kształtownik stalowy.

Proces detekcji uszkodzeń podzielono na dwa etapy. Pierwszy etap polegał na lokalizacji miejsca uszkodzenia. Podczas lokalizacji miejsca uszkodzenia zastosowano metody zmian krzywizny postaci oraz sił reszkowych [25, 38, 44, 49]. W drugim etapie przeprowadzono estymację parametrów charakteryzujących sztywność połączenia płyty żelbetowej i kształtownika stalowego – $K_{v,USZ}$, $K_{h,USZ}$ i $K_{R,X,USZ}$. Podczas symulowania



uszkodzenia belki zespolonej dokonywano miejscowego osłabienia połączenia w postaci usunięcia lub pomniejszenia sztywności zespolenia. Uszkodzenia dokonywano w różnych miejscach po długości belki zespolonej.

Symulację uszkodzenia przeprowadzono dla belki zespolonej C1 oraz belki zespolonej C3. Pierwsza z nich charakteryzuje się rozstawem kołków stalowych co 200 mm, a w drugiej z nich zastosowano rozstaw kołków stalowych co 100 mm. Proces uszkodzenia rozpoczęto od obliczenia częstotliwości i postaci drgań własnych dla modeli belek nieuszkodzonych, dla wartości parametrów otrzymanych w wyniku przeprowadzonej estymacji (rozdział 5.1, tabela 5.3). W celu odzwierciedlenia w badaniach symulacyjnych prowadzenia procesu znajdowania uszkodzeń na podstawie rzeczywistych warunków i punktów pomiarowych w badaniach doświadczalnych, charakterystyki postaci drgań własnych odczytywano nie ze środków ciężkości SES-ów, ale po transformacji do punktów pomiarowych. Tak samo charakterystyki postaci drgań własnych odczytywano w prowadzonych badaniach doświadczalnych opisanych w rozdziale 2 (patrz Rys. 2.11.c). Następnie dokonywano modyfikacji modelu i uszkadzano wybraną parę kołków stalowych lub kilku par. W modelu uszkodzenie wprowadzano zmniejszając procentowo wartości parametrów definiujących pojedynczy element sprężysto tłumiący, czyli sztywności na ścinanie K_h , sztywności osiowej K_v oraz sztywności rotacyjnej K_{RX} . Dla tak przygotowanego uszkodzonego modelu SES ponownie przeprowadzano obliczenia i wyznaczano częstotliwości, i postacie drgań własnych. W ten sposób otrzymywano dwa zestawy wyników jeden dla belki zespolonej nieuszkodzonej, drugi dla belki uszkodzonej.

W celu dokonania estymacji parametrów zespolenia, dla belki uszkodzonej, których wartości określały w jakim procencie para kołków stalowych została uszkodzona, koniecznym było zlokalizowanie miejsca uszkodzenia. Do tego celu wykorzystano metodę zmian krzywizny postaci oraz sił reszkowych. Krzywiznę fragmentu postaci drgań jest drugą pochodną dla stanu przed i po uszkodzeniu, którą wyznaczono na podstawie zależności (6.1) [1, 51, 54]:

$$\begin{aligned}\Delta_{\varphi'-\varphi} &= k' - k \\ k &= \frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{h^2} \\ k' &= \frac{\varphi'_{i-1} - 2\varphi'_i + \varphi'_{i+1}}{h^2}\end{aligned}\tag{6.1}$$

gdzie:

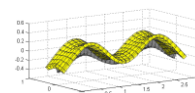
$\Delta_{\varphi'-\varphi}$ – zmiana krzywizny postaci;

k/k' – krzywizna postaci drgań własnych nieuszkodzonej/uszkodzonej konstrukcji;

h – odległość pomiędzy punktami pomiarowymi;

φ_i/φ'_i – wartość postaci drgań własnych w i-tym punkcie nieuszkodzonej/uszkodzonej konstrukcji.

Dla konstrukcji nieuszkodzonych wartość zmiany krzywizny postaci $\Delta_{\varphi'-\varphi}$ jest równa zero, dla miejsc uszkodzonych wartości te są różne od zera. Przy ocenie porównywano pięć krzywizn, dla pięciu postaci drgań własnych, im wyższa postać tym łatwiej



zlokalizować miejsce uszkodzenia konstrukcji. Metoda ta sprawdza się dla dużej liczby punktów pomiarowych. Przy mniejszej ilości punktów pomiarowych trudniej zaobserwować miejsce uszkodzenia. Drugą metodą jaką zastosowano do określenia miejsca uszkodzenia to metoda sił resztkowych. Wartości wektora sił resztkowych wyznaczono z zależności (6.2) [10, 42]:

$$\mathbf{E} = \mathbf{K}\Phi' - (\mathbf{M}\Phi')\Lambda' \quad (6.2)$$

gdzie:

$\mathbf{E}$ – macierz sił resztkowych;

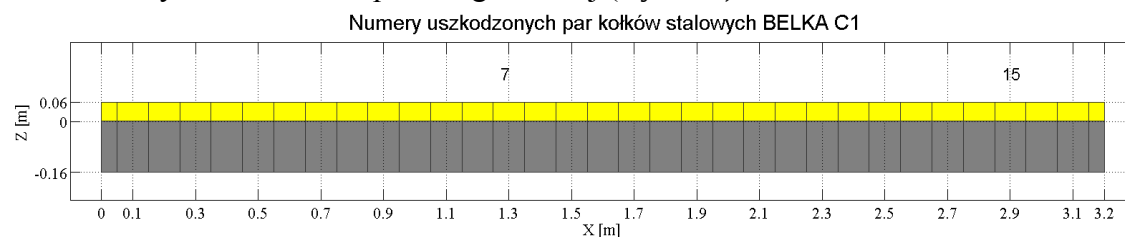
$\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ – macierz sztywności i mas nieuszkodzonej konstrukcji tak zwanej „zdrowej”;

Φ' – macierz postaci drgań własnych dla uszkodzonej konstrukcji;

Λ' – diagonalna macierz częstotliwości drgań własnych dla uszkodzonej konstrukcji.

Dla konstrukcji nieuszkodzonych wartości sił resztkowych są równe zero, natomiast dla miejsc uszkodzonych wartości te są różne od zera.

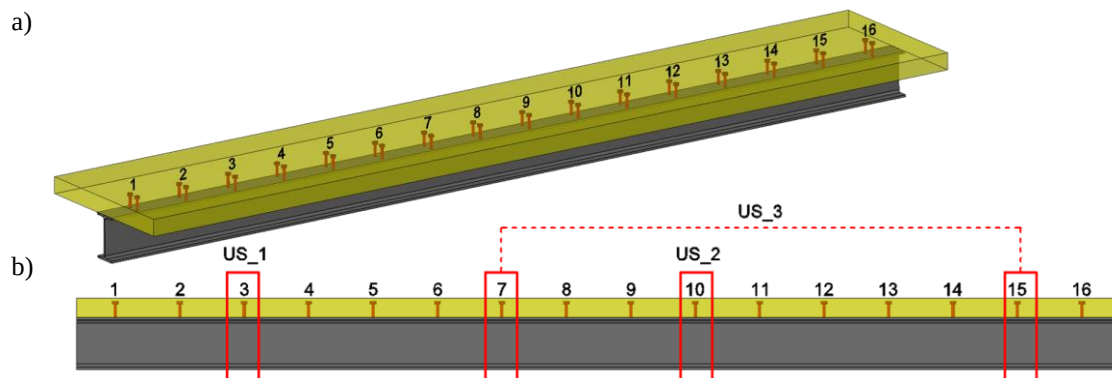
W oprogramowaniu MATLAB opracowano moduł z zaimplementowaną metodą zmian krzywizny postaci oraz sił resztkowych, który umożliwiał zlokalizowanie uszkodzonej pary kołków. W efekcie pracy tego modułu uzyskiwano informacje, które kołki zostały uszkodzone w postaci graficznej (Rys. 6.1).

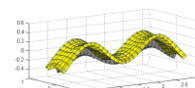


Rys. 6.1 Schemat belki zespolonej w przekroju z oznaczoną uszkodzoną parą kołków stalowych (opis w tekście)

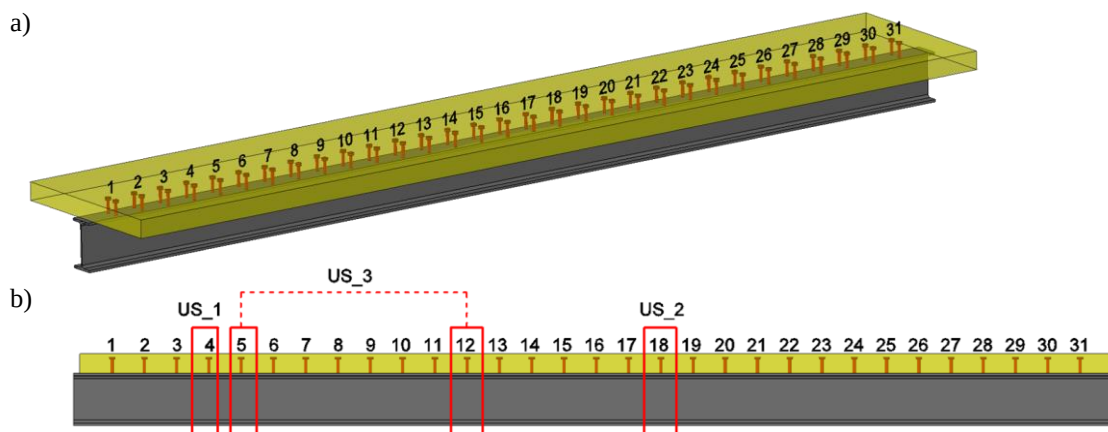
Po znalezieniu miejsca uszkodzenia określano wielkość tego uszkodzenia. W modelu uszkodzonym poszukiwano wartości sztywności zespolenia K_v , K_h i $K_{R,X}$ dla zlokalizowanych uszkodzonych kołków stalowych. Wartości tych parametrów estymowano z zastosowaniem algorytmu identyfikacji I. W efekcie końcowym uzyskiwano wartość o jaką zmniejszyła się sztywność danej pary kołków stalowych.

Na podstawie powyższego algorytmu przeprowadzono kilka eksperymentów numerycznych dla obu belek zespolonych C1 i C3. Na rysunkach (Rys. 6.2 i Rys. 6.3) przedstawiono belki zespolone C1 i C3 z ponumerowanymi parami kołków stalowych.





Rys. 6.2 Schemat belki zespolonej C1 z oznaczonymi parami kołków stalowych: a) widok przestrzenny; b) widok z boku z zaznaczonymi uszkodzonymi parami kołków stalowych



Rys. 6.3 Schemat belki zespolonej C3 z oznaczonymi parami kołków stalowych: a) widok przestrzenny; b) widok z boku z zaznaczonymi uszkodzonymi parami kołków stalowych

Dla belki C1 i C3 wykonano trzy rodzaje uszkodzeń, zestawiono je w tabelach (Tabela 6.1, Tabela 6.2) oraz na rysunkach (Rys. 6.2.b, Rys. 6.3.b) wraz z określonymi wielkościami i miejscami uszkodzenia. Uszkodzenie pierwsze US_1 polegało na osłabieniu połączenia kołka z betonem w wyniku obniżenia sztywności K_v , K_h i $K_{R,X}$ o 30%. Uszkodzenie to umiejscowiono na początku belki zespolonej. UP_2 realizowano jako uszkodzenie polegające na utracie połączenia kołka z betonem w 90%, a zatem obniżenie sztywności K_v , K_h i $K_{R,X}$ o 90%. Uszkodzenie to zlokalizowano w środkowej strefie belki. UP_3 polegało na uszkodzeniu dwóch par kołków stalowych (jednej w 90%, a drugiej o 30%), w środkowej strefie belki oraz na jej końcu lub początku. Współczynnik Δ_{USZ} oznacza wartość procentową uszkodzenia połączenia (wielkość obniżenia wartości K_v , K_h i $K_{R,X}$).

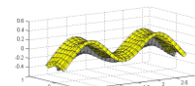
Tabela 6.1 Zestawienie wielkości uszkodzeń oraz nr uszkadzanej pary kołków stalowych, belka zespolona C1

BELKA C1	US_1	US_2	US_3	
NR USZKADZONEJ PARY KOŁKÓW	3	10	7	15
WIELKOŚĆ WPROWADZONEGO USZKODZENIA Δ_{USZ} [%]	30	90	90	30

Tabela 6.2 Zestawienie wielkości uszkodzeń oraz nr uszkadzanej pary kołków stalowych, belka zespolona C3

BELKA C3	US_1	US_2	US_3	
NR USZKADZONEJ PARY KOŁKÓW	4	18	5	12
WIELKOŚĆ WPROWADZONEGO USZKODZENIA Δ_{USZ} [%]	30	90	30	90

Prowadząc symulacje numeryczne każdorazowo wykonywano obliczenia dla modeli nieuszkodzonych, następnie uszkodzonych. Na ich podstawie lokalizowano uszkodzenie, a na końcu dokonywano estymacji parametrów sztywności zespolenia uszkodzonego $K_{v,USZ}$, $K_{h,USZ}$ i $K_{R,X,USZ}$. Wyniki symulacji wszystkich uszkodzeń dla belki C1 zestawiono w tabeli 6.3, a dla belki C3 w tabeli 6.4. Współczynnikiem Δ'_{USZ}



oznaczono otrzymaną procentową wartość uszkodzenia na podstawie estymacji parametrów uszkodzonych.

Tabela 6.3 Zestawienie wyników estymowanych parametrów $K_{h,USZ}$, $K_{v,USZ}$, $K_{R,X,USZ}$ wielkości uszkodzenia oraz lokalizacji uszkodzanej pary kołków stalowych dla uszkodzeń US_1, US_2 i US_3, dla belki zespolonej C1

BELKA C1	US_1	US_2	US_3	
NR USZKODZONEJ PARY KOŁKÓW	3	10	7	15
WIELKOŚĆ OBLICZONEGO USZKODZENIA $\Delta'_{USZ}[\%]$	27	90	94	36
K_h [N/m]	1,41E+08	1,41E+08	1,41E+08	1,41E+08
$K_{h,USZ}$ [N/m]	1,03E+08	1,45E+07	8,54E+06	9,00E+07
K_v [N/m]	1,37E+08	1,37E+08	1,37E+08	1,37E+08
$K_{v,USZ}$ [N/m]	1,00E+08	1,41E+07	8,30E+06	8,75E+07
$K_{R,X}$ [Nm/m]	4,96E+03	4,96E+03	4,96E+03	4,96E+03
$K_{R,X,USZ}$ [Nm/m]	3,62E+03	5,10E+02	3,00E+02	3,16E+03
E_c [N/m ²]	2,79E+10	2,79E+10	2,79E+10	2,79E+10

Tabela 6.4 Zestawienie wyników estymowanych parametrów $K_{h,USZ}$, $K_{v,USZ}$, $K_{R,X,USZ}$ wielkości uszkodzenia oraz lokalizacji uszkodzanej pary kołków stalowych dla uszkodzeń US_1, US_2 i US_3, dla belki zespolonej C3

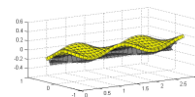
BELKA C3	US_1	US_2	US_3	
NR USZKODZONEJ PARY KOŁKÓW	4	18	5	12
WIELKOŚĆ OBLICZONEGO USZKODZENIA $\Delta'_{USZ}[\%]$	37	90	24	97
K_h [N/m]	1,09E+08	1,09E+08	1,090E+08	1,090E+08
$K_{h,USZ}$ [N/m]	6,82E+07	1,13E+07	8,266E+07	3,772E+06
K_v [N/m]	2,00E+08	2,00E+08	1,996E+08	1,996E+08
$K_{v,USZ}$ [N/m]	1,25E+08	2,07E+07	1,515E+08	6,911E+06
$K_{R,X}$ [Nm/m]	2,63E+03	2,63E+03	2,627E+03	2,627E+03
$K_{R,X,USZ}$ [Nm/m]	1,64E+03	2,72E+02	1,993E+03	9,095E+01
E_c [N/m ²]	2,87E+10	2,87E+10	2,871E+10	2,871E+10

Każdorazowo otrzymano zgodność co do miejsca lokalizacji uszkodzenia, a otrzymane wielkości uszkodzeń są zbliżone do oczekiwanych zarówno dla belki C1 jak i C3. Opracowana metoda estymacji parametrów modeli może być efektywnym narzędziem detekcji uszkodzeń. Kolejnym etapem prowadzonych badań będzie przetestowanie tej metody na rzeczywistych konstrukcjach belek stalowo-betonowych.

7. Wnioski i kierunki dalszych prac

Przeprowadzone w ramach pracy badania doświadczalne, analizy teoretyczne i symulacyjne upoważniają do stwierdzenia, że cel pracy został osiągnięty, a tezy rozprawy zostały udowodnione. Rozprawa doktorska skłoniła Autorkę do sformułowania następujących wniosków i zaplanowania dalszych kierunków prac naukowych:

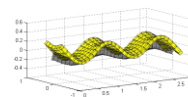
1. Proponowany przestrzenny dyskretny model płyty żelbetowej w konwencji metody sztywnych elementów skończonych pozwala analizować różne formy drgań, zarówno giętne, wzdłużne jak i skrętne. Wprowadzone modyfikacje w modelu płyty w porównaniu z klasycznym podejściem [22, 23], pozwoliły na uzyskanie wysokiej zgodności wyników w zakresie częstotliwości i postaci drgań z rozwiązaniem analitycznym.
2. Proponowany przestrzenny dyskretny model belki stalowo-betonowej w konwencji metody sztywnych elementów skończonych umożliwia analizę różnych form drgań, zarówno giętnych, wzdłużnych, skrętnych, giętnych poziomych, jak i pasa dolnego kształtownika i innych.
3. Opracowany przestrzenny model belki zespolonej, po przeprowadzeniu procesu estymacji, pozwolił na wyznaczenie podstawowych charakterystyk dynamicznych: częstotliwości drgań własnych, postaci drgań własnych i częstotliwościowych funkcji przejścia.
4. Opracowany *algorytm identyfikacji I* bazujący na porównaniu doświadczalnych i obliczeniowych częstotliwości oraz postaci drgań własnych pozwala na estymację parametrów sztywnościowych modelu takich jak: sztywności zespolenia (K_h , K_v oraz $K_{R,X}$) oraz zastępczego dynamicznego modułu sprężystości podłużnej dla betonu E_c . Wyznaczone parametry pozwalają na opracowanie modelu dobrze odwzorowującego rzeczywiste zachowanie się belki stalowo-betonowej. Obliczone wartości częstotliwości drgań własnych są porównywalne do tych uzyskanych na podstawie badań doświadczalnych. Uzyskano dobre dopasowanie obliczeniowych i doświadczalnych postaci drgań własnych.



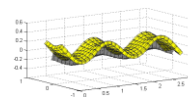
5. Opracowany *algorytm identyfikacji II* na podstawie porównania doświadczalnych i obliczeniowych częstotliwościowych funkcji przejścia pozwala na łączną estymację parametrów sztywnościowych (K_h , K_v , E_c), oraz właściwości tłumiących opisanych za pomocą współczynników strat betonu η_c , stali η_s i zespolenia η_z . Wyznaczone parametry pozwalają na opracowanie modelu belki zespolonej, która umożliwi dobre odwzorowanie przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia uzyskanych na podstawie badań.
6. Opracowany algorytm detekcji wielkości uszkodzeń belek zespolonych pozwala na estymację parametrów zespolenia uszkodzonego ($K_{v,USZ.}$, $K_{h,USZ.}$ i $K_{R,X,USZ.}$). Obliczone wartości wielkości uszkodzenia są zbliżone do założonych.
7. Planowana jest dalsza rozbudowa modelu przestrzennego w celu dokładniejszej analizy połączenia płyty żelbetowej z kształtownikiem stalowym. Poprzez wprowadzenie modelu połączenia stal-beton uwzględniający sztywność stykową styczną i normalną.
8. Proponowane algorytmy identyfikacji można zastosować do rzeczywistych konstrukcji zespolonych. Wnioski z analiz pozwolą na podjęcie dalszych prac w zakresie detekcji uszkodzeń konstrukcji zespolonych. Planowane są badania belek zespolonych bez uszkodzeń, a następnie z wprowadzonymi uszkodzeniami. Opracowane w niniejszej pracy algorytmy identyfikacji wielkości uszkodzenia zostaną poddane weryfikacji z rzeczywistymi badaniami doświadczalnymi obciążonymi błędami pomiarowymi.
9. Autorka planuje wykorzystać opracowane modele belek zespolonych, do zamodelowania bardziej złożonych struktur: strop zespolony lub przęsło belkowego mostu zespolonego.

Bibliografia

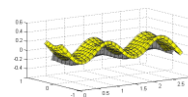
1. ABOZEID H. M., FAYED M. N., MOURAD S. M., KHALIL A. H.: Damage Detection Of Cable-Stayed Bridges Using Curvature Changes In Modal Mode Shapes. International Conference on Bridge Management System, Kair (2006), mat. konf.
2. ADAMIEC-WÓJCIK, I., NOWAK A., WOJCIECH, S.: Comparison of methods for vibration analysis of electrostatic precipitators. *Acta Mechanica Sinica* 27, (2011), 72 – 79.
3. ADAMIEC-WÓJCIK, I., WOJCIECH, S.: Metoda sztywnych elementów skończonych w modelowaniu drgań elektrofiltrów. *Modelowanie Inżynierskie* 43, s.7-14, Gliwice 2012.
4. ALLEMANG R.J.: The Modal Assurance Criterion (MAC): Twenty Years of Use and Abuse. *Sound and Vibration* 37, (2003), 14 – 21.
5. BĄK R., BURCZYŃSKI T.: Wytrzymałość materiałów z elementami ujęcia komputerowego. WNT, Warszawa 2001.
6. BERCZYŃSKI S., WRÓBLEWSKI T.: Vibration of steel-concrete composite beams using the Timoshenko beam model. *Journal of Vibration and Control* 11, (2005), 829 – 848.
7. BERCZYŃSKI S., WRÓBLEWSKI T.: Experimental Verification of Natural Vibration Models of Steel-concrete Composite Beams. *Journal of Vibration and Control* 16, (2010), 2057 – 2081.
8. BISCONTIN G., MORASSI A., WENDEL, P.: Vibrations of steel-concrete composite beams. *Journal of Vibration and Control* 6, (2000), 691 – 714.
9. BRANT A.: Noise and vibration analysis: signal analysis and experimental procedures. WILEY, United Kingdom 2011.
10. BRASILIANO A., DOZ N. G., BRITO DE V.L. J.: Damage identification in continuous beams and frame structures using the Residual Error Method in the Movement Equation. *Elsevier Nuclear Engineering and Design* 227, (2004), 1-17.
11. CHODŹKO M.: Zastosowanie metod analizy modalnej w badaniach doświadczalnych dynamiki obrabiarek. ZAPOL, Szczecin 2012.
12. DE SILVA C.W.: Vibration. Fundamentals and practice. CRC Press, Boca Raton, FL 2000.



13. DILENA M., MORASSI A.: A Damage Analysis of Steel-Concrete Composite Beams Via Dynamic Methods: Part II. Analytical Models and Damage Detection. *Journal of Vibration and Control* 9, (2003), 529-565.
14. DILENA M., MORASSI A.: Experimental modal analysis of steel concrete composite beams with partially damaged connection. *Journal of Vibration and Control* 10, (2004), 897 – 913.
15. DILENA M., MORASSI A.: Vibrations of steel-concrete composite beams with partially degraded connection and applications to damage detection. *Journal of Sound and Vibration* 320, (2009), 101 – 124.
16. DYŁĄG Z. JAKUBOWICZ A., ORŁOŚ Z.: *Wytrzymałość materiałów. Tom 1.* WNT, Warszawa 2003.
17. EWINS D. J.: *Modal testing: theory, practice, and application.* Hertfordshire, Research Studies Press, 2000.
18. EWINS D. J.: Model validation: Correlation for updating. *Sādhamā* 25 (3), 2000, 221 – 234.
19. GOMEZ H. C.: *System Identification of Highway Bridges using Long-Term Vibration Monitoring Data.* LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.
20. GOMEZ H. C. ,FANNING P. J. ,FENG M. Q. ,LEE S.: Testing and long-term monitoring of a curved concrete box girder bridge. *Engineering Structures* 33 (10), 2011, 2861 – 2869.
21. HE J., FU Z.F.: *Modal analysis.* Butterworth-Heinemann, 2001.
22. KRUSZEWSKI J. et al.: *Metoda sztywnych elementów skończonych w dynamice konstrukcji.* WNT, Warszawa 1999.
23. KRUSZEWSKI J. et al.: *Metoda sztywnych elementów skończonych.* Arkady, Warszawa 1975.
24. LIEW K. M., XIANG Y., KITIPORNCHAI S.: Transverse vibration of thick rectangular plates-I. Comprehensive sets of boundary conditions. *Computer and Structures* 49 (1), (1993), 1-29.
25. LIU K., DE ROECK G.: Damage Detection of Shear Connectors in Composite Bridges. *Structural Health Monitoring* 8 (5), (2009), 345-356.
26. LEISSA A. W.: The free vibration of rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration* 31 (3), (1973), 257-293.
27. MAAS S., ZÜRBES A., WALDMANN D, WALTERING M, BUNGARD V., DE ROECK G.: Damage assessment of concrete structures through dynamic testing methods. Part 1 – Laboratory tests. *Engineering Structures* 34 (2012), 351-362.
28. MAECK J., ABDEL WAHAB M., PEETERS B., DE ROECK G., DE VISSCHER J., DE WILDE W.P., NDAMBI J.-M., VANTOMME J.: Damage identification in reinforced concrete structures by dynamic stiffness determination. *Engineering Structures* 22 (2000), 1339 – 1349.
29. MARCHELEK K.: *Dynamika obrabiarek.* WNT, Warszawa 1991.
30. MARWALA T.: *Finite-element-model Updating Using Computational Intelligence Techniques.* Springer-Verlag, London 2010.



31. MORASSI A., ROCCHETTO L.: A Damage Analysis of Steel-Concrete Composite Beams Via Dynamic Methods: Part I. Experimental Results. *Journal of Vibration and Control* 9, (2003), 507-527.
32. MORDINI A., SAVOV K., WENZEL H.: The Finite Element Model Updating: A Powerful Tool for Structural Health Monitoring. *Structural Engineering International* 4, (2007), 352 – 358.
33. MORDINI A., WENZEL H.: Damage detection on beam structures by means of VCUPDATE. *Electronic Journal of Structural Engineering* 10, (2010), 11 – 21.
34. MROZEK B., MROZEK Z.: MATLAB i Simulink. Poradnik użytkownika. HELION, Gliwice 2004.
35. NOWAK A.: Modelowanie i pomiary drgań elektrod osadczych elektrofiltrów suchych. Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku Białej, Bielsko-Biała 2011.
36. NOWAK A.: Numerical verification and experimental validation of the FEM model of collecting electrodes of dry electrostatic precipitator. *Latin American Journal of Solids and Structures* 10 (1), 2013.
37. OSTANIN A.: Metody optymalizacji z MATLAB. Ćwiczenia laboratoryjne. NAKOM, Poznań.
38. PANDEY A.K., BISWAS M., SAMMAN M.M.: Damage detection from changes in curvature mode shapes. *Journal of Sound and Vibration* 145 (2), (1991), 321- 332.
39. PEETERSA B., AUWERAERA H.V.D., GUILLAUMB P., LEURIDANA J.: The PolyMAX frequency-domain method: a new standard for modal parameter estimation? *Shock and Vibration* 11 (3-4), (2004), 395-409.
40. PEŁKA-SAWENKO A., ABRAMOWICZ M., WRÓBLEWSKI T., BERCZYŃSKI S., SZUMIGAŁA M.: Modeling and analysis of free vibration of steel-concrete composite beams. *Recent Advances in Computational Mechanics – Łodygowski, Rakowski & Litewka (Eds), Taylor & Francis Group, Londyn 2014, 103-110.*
41. PRATAP R.: MATLAB 7 dla naukowców i inżynierów. PWN, Warszawa 2007.
42. RALBOVSKÝ M.: Vibration-based damage detection in concrete structures using modal force residuals. *Slovak Journal of Civil Engineering* 4, (2008), 26-34.
43. RUCKA M., WILDE K.: Dynamika budowli z przykładami w środowisku MATLAB. WPG, Gdańsk 2008.
44. REN W. X., YU J. D., SHEN J. Y.: Structural damage identification using residual modal forces. *MAC-XXI: Conference & Exposition on Structural Dynamics - Innovative Measurement Technologies, Orlando (2003), mat. konfer.*
45. SAPOUNTZAKIS E. J.: Dynamic analysis of composite steel-concrete structures with deformable connection. *Computers and Structures* 82, (2004), 717 – 729.
46. SAPOUNTZAKIS E. J., MOKOS V. G.: An improved model for the dynamic analysis of plates stiffened by parallel beams. *Engineering Structures* 30, (2008), 1720–1733.

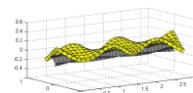


47. SZCZEŚNIAK W.: Wybrane zagadnienia z dynamiki płyt. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.
48. TEUGHELS A., MAECK J., DE ROECK G.: Damage assessment by FE model updating using damage functions. *Computers and Structures* 80, (2002), 1869 – 1879.
49. TEUGHELS A., MAECK J., DE ROECK G.: Damage Detection and Parameter Identification by Finite Element Model Updating. *Archives of Computational Methods in Engineering* 12, (2005), 123- 164.
50. UHL T.: Komputerowo wspomagana identyfikacja modeli konstrukcji mechanicznych. WTN, Warszawa 1997.
51. WAHAB A.M.M., DE ROECK G.: Damage detection in bridges using modal curvatures application to a real damage scenario. *Journal of Sound and Vibration* 226, (1999), 217-235.
52. WITTBRODT E., ADAMIEC-WÓJCIK I., WOJCIECH S.: Dynamics of flexible multibody systems. Rigid finite element method, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 2006.
53. WITTBRODT E., SZCZOTKA M., MACZYŃSKI A., WOJCIECH S.: Rigid Finite Element Method in Analysis of Dynamics of Offshore Structures, Springer- Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 2013.
54. WOLLMANN CH.: Estimation of the principle curvatures of approximated surfaces. *Computer Aided Geometric Design* 17, (2000), 621–630.
55. WRÓBLEWSKI T., JAROSIŃSKA M., BERCZYŃSKI S.: Application of ETR for diagnosis of damage in steel-concrete composite beams. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 49 (1), (2011), 51-70.
56. WRÓBLEWSKI T., JAROSIŃSKA M., BERCZYŃSKI S.: Damage location in steel-concrete composite beams using energy transfer ratio (ETR). *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 51 (1), (2013), 91-103.
57. WRÓBLEWSKI T., PEŁKA-SAWENKO A., ABRAMOWICZ M., BERCZYŃSKI S.: Modeling and analysis of free vibration of steel-concrete composite beams by finite element method. *Advances in Manufacturing Science and Technology* 36 (4), (2012), 85-96.

Załącznik A

Spis tabel

Tabela Z.1	Częstotliwości i tłumienie modalne belki zespolonej C1	121
Tabela Z.2	Częstotliwości i tłumienie modalne belki zespolonej C2	122
Tabela Z.3	Częstotliwości i tłumienie modalne belki zespolonej C3	123
Tabela Z.4	Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla belki zespolonej C2, wymuszenie 1–Z, kierunek Z	123
Tabela Z.5	Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla belki zespolonej C2, wymuszenie 2+X, kierunek X	123
Tabela Z.6	Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla belki zespolonej C2, wymuszenie 2–Z, kierunek Z	124
Tabela Z.7	Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla belki zespolonej C2, wymuszenie 2–Z, kierunek Z	124
Tabela Z.8	Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla belki zespolonej C3, wymuszenie 1–Z, kierunek Z	124
Tabela Z.9	Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla belki zespolonej C3, wymuszenie 2+X, kierunek X	124
Tabela Z.10	Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla belki zespolonej C3, wymuszenie 2–Z, kierunek Z	125
Tabela Z.11	Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla belki zespolonej C3, wymuszenie 2–Z, kierunek Z	125
Tabela Z.12	Zestawienie punktów startowych dla estymowanych parametrów K_h , K_v , K_{RX} , E_c , dla modelu belki zespolonej C2	126
Tabela Z.13	Zestawienie wyników estymowanych parametrów K_h , K_v , K_{RX} , E_c , dla modelu belki zespolonej C2, dla trzech różnych punktów startowych	126
Tabela Z.14	Zestawienie punktów startowych dla estymowanych parametrów K_h , K_v , K_{RX} , E_c , dla modelu belki zespolonej C3	126
Tabela Z.15	Zestawienie wyników estymowanych parametrów K_h , K_v , K_{RX} , E_c , dla modelu belki zespolonej C3, dla trzech różnych punktów startowych	127
Tabela Z.16	Zestawienie punktów startowych dla estymowanych parametrów K_h , K_v , E_c , η_c i η_z , dla modeli belki zespolonej C2	127
Tabela Z.17	Zestawienie wyników estymowanych parametrów K_h , K_v , E_c , η_c i η_z , dla modeli belki zespolonej C2, dla trzech różnych punktów startowych	127
Tabela Z.18	Zestawienie punktów startowych dla estymowanych parametrów K_h , K_v , E_c , η_c i η_z , dla modeli belki zespolonej C3	128
Tabela Z.19	Zestawienie wyników estymowanych parametrów K_h , K_v , E_c , η_c i η_z , dla modeli belki zespolonej C3, dla trzech różnych punktów startowych	128
Tabela Z.20	Zestawienie wyników estymowanych parametrów K_h , K_v , E_c i η_c , η_z dla ESTYMACJI 2, dla belki zespolonej C2	128
Tabela Z.21	Zestawienie wyników estymowanych parametrów K_h , K_v , E_c i η_c , η_z dla ESTYMACJI 1, dla belki zespolonej C3	128
Tabela Z.1	Częstotliwości i tłumienie modalne belki zespolonej C1	



BELKA C1						
Wymuszenie	1-Z		2-Z		2+X	
i	f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]	f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]	f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]
1 _g	73,38	0,16	73,41	0,13	-	-
2 _g	167,41	0,76	167,94	0,50	-	-
3 _g	262,02	0,58	262,36	0,57	-	-
4 _g	356,48	0,46	356,93	0,46	-	-
5 _g	446,75	0,58	447,40	0,56	-	-
1 _o	-	-	-	-	567,30	0,28
1 _s	64,24	0,26	-	-	-	-
2 _s	143,66	0,33	-	-	-	-
3 _s	217,68	0,37	-	-	-	-
4 _s	299,75	0,36	-	-	-	-
5 _s	387,92	0,45	-	-	-	-
0 _{pd}	92,03	0,11	-	-	-	-
1 _{pd}	99,89	0,07	-	-	-	-
2 _{pd}	145,65	0,06	-	-	-	-
3 _{pd}	225,21	0,05	-	-	-	-
4 _{pd}	336,38	0,08	-	-	-	-

Tabela Z.2 Częstotliwości i tłumienie modalne belki zespolonej C2

BELKA C2						
Wymuszenie	1-Z		2-Z		2+X	
i	f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]	f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]	f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]
1 _g	73,59	0,17	73,63	0,16	-	-
2 _g	166,03	0,70	166,50	0,55	-	-
3 _g	262,24	0,60	262,58	0,59	-	-
4 _g	356,25	0,54	356,61	0,47	-	-
5 _g	456,09	0,61	457,03	0,61	-	-
1 _o	-	-	-	-	559,64	0,46
1 _s	64,55	0,26	-	-	-	-
2 _s	143,06	0,27	-	-	-	-
3 _s	216,90	0,35	-	-	-	-
4 _s	298,18	0,28	-	-	-	-
5 _s	383,97	0,42	-	-	-	-
0 _{pd}	92,87	0,06	-	-	-	-
1 _{pd}	99,95	0,14	-	-	-	-
2 _{pd}	146,20	0,05	-	-	-	-
3 _{pd}	225,75	0,04	-	-	-	-
4 _{pd}	336,90	0,06	-	-	-	-

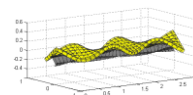


Tabela Z.3 Częstotliwości i tłumienie modalne belki zespolonej C3

BELKA C3						
Wymuszenie	1-Z		2-Z		2+X	
i	f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]	f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]	f_i^{exp} [Hz]	ζ [%]
1_g	75,37	0,14	75,41	0,14	-	-
2_g	174,82	0,48	175,13	0,34	-	-
3_g	277,68	0,49	278,12	0,45	-	-
4_g	378,80	0,46	379,55	0,45	-	-
5_g	485,53	0,47	485,96	0,48	-	-
1_o	-	-	-	-	573,08	0,64
1_s	66,35	0,27	-	-	-	-
2_s	146,60	0,26	-	-	-	-
3_s	221,42	0,35	-	-	-	-
4_s	302,83	0,33	-	-	-	-
5_s	394,70	0,46	-	-	-	-
0_{pd}	94,90	0,08	-	-	-	-
1_{pd}	102,41	0,06	-	-	-	-
2_{pd}	148,49	0,03	-	-	-	-
3_{pd}	227,40	0,03	-	-	-	-
4_{pd}	338,35	0,04	-	-	-	-

Tabela Z.4 Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla belki zespolonej C2, wymuszenie 1-Z, kierunek Z

WYMUSZENIE 1-Z								
Punkt	1		3		33		35	
i	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]
1_s	1,686	64,50	1,805	64,50	1,751	64,50	1,814	64,50
2_s	2,619	143,25	2,623	143,25	2,530	143,25	2,491	143,25
3_s	2,155	217,25	2,151	217,25	2,181	217,25	2,262	217,25
4_s	1,897	298,00	1,946	298,25	1,904	298,00	1,959	298,25
5_s	1,439	384,50	1,444	384,75	1,439	384,50	1,494	384,75

Tabela Z.5 Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla belki zespolonej C2, wymuszenie 2+X, kierunek X

WYMUSZENIE 2+X								
Punkt	1		3		33		35	
i	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]
1_o	0,508	559,75	0,594	561,25	0,535	559,75	0,707	561,00

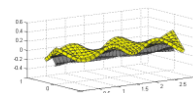


Tabela Z.6 Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, kierunek Z

WYMUSZENIE 2-Z								
Punkt	1		3		33		35	
i	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]
1 _g	2,308	73,75	2,539	73,75	2,324	73,75	2,517	73,75
2 _g	0,590	167,50	0,559	168,00	0,561	167,25	0,543	167,75
3 _g	0,492	263,50	0,489	264,25	0,513	263,25	0,489	264,00
4 _g	0,480	357,75	0,460	358,25	0,458	357,00	0,432	358,00
5 _g	0,390	458,00	0,481	458,75	0,341	457,00	0,408	458,25

Tabela Z.7 Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, kierunek Z

WYMUSZENIE 2-Z								
Punkt	2		4		34		36	
i	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]
1 _g	2,506	73,75	2,352	73,75	2,479	73,75	2,291	73,75
2 _g	0,518	167,75	0,477	167,75	0,496	167,75	0,440	167,75
3 _g	0,392	264,00	0,340	263,75	0,398	264,00	0,327	263,50
4 _g	0,343	358,00	0,266	357,75	0,327	357,75	0,231	357,75
5 _g	0,337	458,00	0,204	457,75	0,303	458,25	0,154	457,75

Tabela Z.8 Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla belki zespolonej C3, wymuszenie 1-Z, kierunek Z

WYMUSZENIE 1-Z								
Punkt	1		3		33		35	
i	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]
1 _s	1,990	66,25	1,917	66,25	2,008	66,25	1,890	66,25
2 _s	2,478	146,75	2,460	146,75	2,599	146,75	2,516	146,75
3 _s	2,430	221,75	2,316	221,75	2,354	221,75	2,234	221,75
4 _s	2,225	303,25	2,087	303,25	2,163	303,25	2,084	303,25
5 _s	1,119	395,25	1,215	394,75	1,137	394,75	1,220	394,75

Tabela Z.9 Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla belki zespolonej C3, wymuszenie 2+X, kierunek X

WYMUSZENIE 2+X								
Punkt	1		3		33		35	
i	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]
1 _o	0,751	575,00	0,594	575,00	0,613	575,00	0,524	575,00

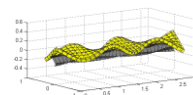


Tabela Z.10 Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla belki zespolonej C3, wymuszenie 2-Z, kierunek Z

WYMUSZENIE 2-Z								
Punkt	1		3		33		35	
i	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]
1 _g	2,482	75,50	2,887	75,50	2,422	75,5	2,844	75,50
2 _g	0,908	175,50	0,967	175,75	0,907	175,5	0,978	175,75
3 _g	0,675	278,50	0,656	279,25	0,621	278,25	0,633	279,00
4 _g	0,595	380,00	0,497	381,00	0,604	380	0,453	380,75
5 _g	0,331	487,00	0,600	487,50	0,195	486	0,498	487,00

Tabela Z.11 Amplitudy FRF odpowiadające wybranym rezonansom według badań doświadczalnych dla belki zespolonej C3, wymuszenie 2-Z, kierunek Z

WYMUSZENIE 2-Z								
Punkt	2		4		34		36	
i	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]	$A-FRF$ [m·s ⁻² /N]	f_i^{exp} [Hz]
1 _g	2,682	75,50	2,536	75,50	2,656	75,50	2,503	75,50
2 _g	0,816	175,50	0,778	176,00	0,830	175,50	0,782	176,00
3 _g	0,511	278,75	0,439	279,50	0,486	278,75	0,413	279,50
4 _g	0,376	380,25	0,319	381,25	0,382	380,25	0,320	381,25
5 _g	0,346	486,00	0,283	487,25	0,330	486,25	0,281	487,50

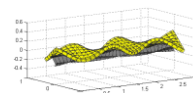


Tabela Z.12 Zestawienie punktów startowych dla estymowanych parametrów K_h , K_v , K_{RX} , E_c , dla modelu belki zespolonej C2

	PRÓBA NR 1	PRÓBA NR 2	PRÓBA NR 3
$K_{h,0}$ [N/m]	2,60E+08	2,70E+08	2,80E+08
$K_{v,0}$ [N/m]	2,60E+08	2,80E+08	2,70E+08
$K_{R,X,0}$ [Nm/m]	4,90E+03	5,00E+03	5,00E+03
$E_{C,0}$ [N/m ²]	2,60E+10	2,50E+10	2,50E+10

Tabela Z.13 Zestawienie wyników estymowanych parametrów K_h , K_v , K_{RX} , E_c , dla modelu belki zespolonej C2, dla trzech różnych punktów startowych

	PRÓBA NR 1			PRÓBA NR 2			PRÓBA NR 3		
i	f_i^{exp} [Hz]	f_i^{num} [Hz]	Δ [%]	f_i^{exp} [Hz]	f_i^{num} [Hz]	Δ [%]	f_i^{exp} [Hz]	f_i^{num} [Hz]	Δ [%]
1 _s	64,55	63,31	-1,9	64,55	63,30	-1,9	64,55	63,31	-1,9
2 _s	143,06	142,17	-0,6	143,06	142,16	-0,6	143,06	142,16	-0,6
3 _s	216,90	215,15	-0,8	216,90	215,13	-0,8	216,90	215,13	-0,8
4 _s	298,18	295,68	-0,8	298,18	295,65	-0,8	298,18	295,66	-0,8
5 _s	383,97	385,07	0,3	383,97	385,02	0,3	383,97	385,03	0,3
1 _g	73,59	73,69	0,1	73,59	73,68	0,1	73,59	73,69	0,1
2 _g	166,03	164,23	-1,1	166,03	164,22	-1,1	166,03	164,22	-1,1
3 _g	262,24	263,43	0,5	262,24	263,43	0,5	262,24	263,41	0,4
4 _g	356,25	360,85	1,3	356,25	360,88	1,3	356,25	360,85	1,3
5 _g	456,09	458,02	0,4	456,09	458,09	0,4	456,09	458,03	0,4
1 _o	559,64	575,49	2,8	559,64	575,44	2,8	559,64	575,45	2,8
0 _{pd}	92,87	92,87	0,0	92,87	92,87	0,0	92,87	92,87	0,0
K_h [N/m]	1,730E+08			1,727E+08			1,728E+08		
K_v [N/m]	3,473E+08			3,490E+08			3,480E+08		
$K_{R,X}$ [Nm/m]	3,719E+03			3,719E+03			3,719E+03		
E_C [N/m ²]	2,754E+10			2,753E+10			2,754E+10		

Tabela Z.14 Zestawienie punktów startowych dla estymowanych parametrów K_h , K_v , K_{RX} , E_c , dla modelu belki zespolonej C3

	PRÓBA NR 1	PRÓBA NR 2	PRÓBA NR 3
$K_{h,0}$ [N/m]	2,60E+08	2,70E+08	2,80E+08
$K_{v,0}$ [N/m]	2,60E+08	2,80E+08	2,70E+08
$K_{R,X,0}$ [Nm/m]	2,45E+03	2,50E+03	2,50E+03
$E_{C,0}$ [N/m ²]	2,60E+10	2,50E+10	2,50E+10

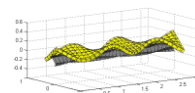


Tabela Z.15 Zestawienie wyników estymowanych parametrów K_h , K_v , K_{RX} , E_c , dla modelu belki zespolonej C3, dla trzech różnych punktów startowych

	PRÓBA NR 1			PRÓBA NR 2			PRÓBA NR 3		
i	f_i^{exp} [Hz]	f_i^{num} [Hz]	Δ [%]	f_i^{exp} [Hz]	f_i^{num} [Hz]	Δ [%]	f_i^{exp} [Hz]	f_i^{num} [Hz]	Δ [%]
1_s	66,35	64,50	-2,8	66,35	64,53	-2,7	66,35	64,51	-2,8
2_s	146,60	145,01	-1,1	146,60	145,06	-1,1	146,60	145,02	-1,1
3_s	221,42	219,93	-0,7	221,42	220,03	-0,6	221,42	219,96	-0,7
4_s	302,83	302,74	0,0	302,83	302,87	0,0	302,83	302,78	0,0
5_s	394,70	394,70	0,0	394,70	394,87	0,0	394,70	394,75	0,0
1_g	75,37	75,90	0,7	75,37	75,88	0,7	75,37	75,80	0,6
2_g	174,82	173,50	-0,8	174,82	173,42	-0,8	174,82	173,11	-1,0
3_g	277,68	279,41	0,6	277,68	279,27	0,6	277,68	278,90	0,4
4_g	378,80	383,67	1,3	378,80	383,50	1,2	378,80	383,31	1,2
5_g	485,53	488,16	0,5	485,53	487,96	0,5	485,53	488,06	0,5
1_o	573,08	586,34	2,3	573,08	586,53	2,3	573,08	586,36	2,3
0_{pd}	95,38	95,38	0,0	95,38	95,38	0,0	95,38	95,38	0,0
K_h [N/m]	2,298E+08			2,280E+08			2,211E+08		
K_v [N/m]	4,000E+08			3,958E+08			4,103E+08		
$K_{R,X}$ [Nm/m]	2,628E+03			2,627E+03			2,628E+03		
E_c [N/m ²]	2,866E+10			2,868E+10			2,867E+10		

Tabela Z.16 Zestawienie punktów startowych dla estymowanych parametrów K_h , K_v , E_c , η_c i η_z , dla modelu belki zespolonej C2

	PRÓBA NR 1	PRÓBA NR 2	PRÓBA NR 3
$K_{h,0}$ [N/m]	1,80E+08	1,40E+08	1,90E+08
$K_{v,0}$ [N/m]	3,00E+08	3,20E+08	2,70E+08
$E_{c,0}$ [N/m ²]	2,70E+10	2,80E+10	2,70E+10
$\eta_{c,0}$ [-]	9,20E-02	8,00E-02	1,00E-01
$\eta_{z,0}$ [-]	3,30E-02	4,50E-02	3,80E-02

Tabela Z.17 Zestawienie wyników estymowanych parametrów K_h , K_v , E_c , η_c i η_z , dla modelu belki zespolonej C2, dla trzech różnych punktów startowych

	PRÓBA NR 1	PRÓBA NR 2	PRÓBA NR 3
K_h [N/m]	1,962E+08	1,962E+08	1,962E+08
K_v [N/m]	1,194E+08	1,194E+08	1,194E+08
E_c [N/m ²]	3,300E+10	3,300E+10	3,300E+10
η_c [-]	4,001E-03	4,001E-03	4,010E-03
η_z [-]	5,164E-02	5,164E-02	5,164E-02
J_{FRF}	6,917E-03	6,917E-03	6,917E-03

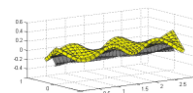


Tabela Z.18 Zestawienie punktów startowych dla estymowanych parametrów K_h , K_v , E_c , η_c i η_z , dla modeli belki zespolonej C3

	PRÓBA NR 1	PRÓBA NR 2	PRÓBA NR 3
$K_{h,0} [N/m]$	1,80E+08	2,40E+08	2,20E+08
$K_{v,0} [N/m]$	3,20E+08	1,50E+08	1,60E+08
$E_{c,0} [N/m^2]$	2,70E+10	2,80E+10	3,00E+10
$\eta_{c,0} [-]$	5,60E-02	4,80E-02	4,00E-02
$\eta_{z,0} [-]$	1,20E-02	1,30E-02	1,00E-02

Tabela Z.19 Zestawienie wyników estymowanych parametrów K_h , K_v , E_c , η_c i η_z , dla modeli belki zespolonej C3, dla trzech różnych punktów startowych

	PRÓBA NR 1	PRÓBA NR 2	PRÓBA NR 3
$K_h [N/m]$	2,335E+08	2,335E+08	2,335E+08
$K_v [N/m]$	1,658E+08	1,658E+08	1,658E+08
$E_c [N/m^2]$	3,100E+10	3,100E+10	3,100E+10
$\eta_c [-]$	3,624E-02	3,623E-02	3,625E-02
$\eta_z [-]$	1,059E-03	1,060E-03	1,047E-03
J_{FRF}	7,462E-02	7,462E-02	7,462E-02

Tabela Z.20 Zestawienie wyników estymowanych parametrów K_h , K_v , E_c i η_c , η_z dla ESTYMACJI 2, dla belki zespolonej C2

WYMUSZENIE	1-Z					
PUNKTY POMIAROWE (KIERUNEK)	1 Z, 35 Z					
PARAMETR	$K_h [N/m]$	$K_v [N/m]$	$E_c [N/m^2]$	$\eta_c [-]$	$\eta_z [-]$	J_{FRF}
ESTYMACJA 2	2,619E+08	7,005E+07	2,852E+10	0,0086	0,0175	0,0396

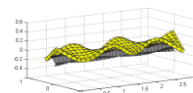
Tabela Z.21 Zestawienie wyników estymowanych parametrów K_h , K_v , E_c i η_c , η_z dla ESTYMACJI 1, dla belki zespolonej C3

WYMUSZENIE	2-Z					
PUNKTY POMIAROWE (KIERUNEK)	2 Z, 4Z, 34 Z, 36 Z					
PARAMETR	$K_h [N/m]$	$K_v [N/m]$	$E_c [N/m^2]$	$\eta_c [-]$	$\eta_z [-]$	J_{FRF}
ESTYMACJA 1	2,335E+08	1,658E+08	3,100E+10	0,0362	0,0010	0,0746

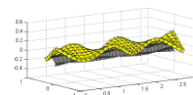
Załącznik B

Spis rysunków

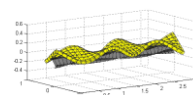
Rys. Z. 1	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 2-Z, punkt 1, kierunek Z.....	135
Rys. Z. 2	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 2-Z, punkt 3, kierunek Z.....	135
Rys. Z. 3	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 2-Z, punkt 4, kierunek Z.....	135
Rys. Z. 4	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 2-Z, punkt 33, kierunek Z.....	136
Rys. Z. 5	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 2-Z, punkt 34, kierunek Z.....	136
Rys. Z. 6	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 2-Z, punkt 35, kierunek Z.....	136
Rys. Z. 7	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 2-Z, punkt 36, kierunek Z.....	137
Rys. Z. 8	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 1-Z, punkt 3, kierunek Z.....	137
Rys. Z. 9	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 1-Z, punkt 33, kierunek Z.....	137
Rys. Z. 10	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 1-Z, punkt 35, kierunek Z.....	138
Rys. Z. 11	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 2+X, punkt 1, kierunek X.....	138
Rys. Z. 12	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 2+X, punkt 3, kierunek X.....	138
Rys. Z. 13	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 2+X, punkt 33, kierunek X.....	139
Rys. Z. 14	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 2+X, punkt 35, kierunek X.....	139
Rys. Z. 15	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, punkt 1, kierunek Z.....	139
Rys. Z. 16	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, punkt 2, kierunek Z.....	140
Rys. Z. 17	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, punkt 3, kierunek Z.....	140
Rys. Z. 18	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, punkt 4, kierunek Z.....	140
Rys. Z. 19	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, punkt 33, kierunek Z.....	141
Rys. Z. 20	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, punkt 34, kierunek Z.....	141
Rys. Z. 21	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, punkt 35, kierunek Z.....	141



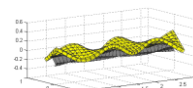
Rys. Z. 22	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, punkt 36, kierunek Z.....	142
Rys. Z. 23	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z.....	142
Rys. Z. 24	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 1-Z, punkt 3, kierunek Z.....	142
Rys. Z. 25	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 1-Z, punkt 33, kierunek Z.....	143
Rys. Z. 26	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 1-Z, punkt 35, kierunek Z.....	143
Rys. Z. 27	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 2+X, punkt 1, kierunek X.....	143
Rys. Z. 28	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 2+X, punkt 3, kierunek X.....	144
Rys. Z. 29	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 2+X, punkt 33, kierunek X.....	144
Rys. Z. 30	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 2+X, punkt 35, kierunek X.....	144
Rys. Z. 31	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 2-Z, punkt 1, kierunek Z.....	145
Rys. Z. 32	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 2-Z, punkt 2, kierunek Z.....	145
Rys. Z. 33	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 2-Z, punkt 3, kierunek Z.....	145
Rys. Z. 34	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 2-Z, punkt 4, kierunek Z.....	146
Rys. Z. 35	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 2-Z, punkt 33, kierunek Z.....	146
Rys. Z. 36	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 2-Z, punkt 34, kierunek Z.....	146
Rys. Z. 37	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 2-Z, punkt 35, kierunek Z.....	147
Rys. Z. 38	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 2-Z, punkt 36, kierunek Z.....	147
Rys. Z. 39	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z.....	147
Rys. Z. 40	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 1-Z, punkt 3, kierunek Z.....	148
Rys. Z. 41	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 1-Z, punkt 33, kierunek Z.....	148
Rys. Z. 42	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 1-Z, punkt 35, kierunek Z.....	148
Rys. Z. 43	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 2+X, punkt 1, kierunek X.....	149
Rys. Z. 44	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 2+X, punkt 3, kierunek X.....	149
Rys. Z. 45	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 2+X, punkt 33, kierunek X.....	149
Rys. Z. 46	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 2+X, punkt 35, kierunek X.....	150
Rys. Z. 47	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla płyty żelbetowej, wymuszenie 2-Z, punkt 5, kierunek Z.....	150
Rys. Z. 48	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla płyty żelbetowej, wymuszenie 2-Z, punkt 23, kierunek Z.....	150
Rys. Z. 49	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla płyty żelbetowej, wymuszenie 2-Z, punkt 26, kierunek Z.....	151
Rys. Z. 50	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla płyty żelbetowej, wymuszenie 1-Z, punkt 3, kierunek Z.....	151
Rys. Z. 51	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla płyty żelbetowej, wymuszenie 1-Z, punkt 25, kierunek Z.....	151



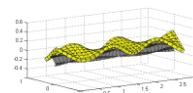
Rys. Z. 52	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla płyty żelbetowej, wymuszenie 1-Z, punkt 27, kierunek Z.....	152
Rys. Z. 53	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla kształownika stalowego, wymuszenie 1-Z, punkt 2, kierunek Z.....	152
Rys. Z. 54	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla kształownika stalowego, wymuszenie 1-Z, punkt 17, kierunek Z.....	152
Rys. Z. 55	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla kształownika stalowego, wymuszenie 1-Z, punkt 18, kierunek Z.....	153
Rys. Z. 56	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla kształownika stalowego, wymuszenie 2+Y, punkt 1, kierunek Y.....	153
Rys. Z. 57	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla kształownika stalowego, wymuszenie 2+Y, punkt 16, kierunek Y.....	153
Rys. Z. 58	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla kształownika stalowego, wymuszenie 2+Y, punkt 18, kierunek Y.....	154
Rys. Z. 59	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla kształownika stalowego, wymuszenie 1+X, punkt 1, kierunek X.....	154
Rys. Z. 60	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla kształownika stalowego, wymuszenie 1+X, punkt 2, kierunek X.....	154
Rys. Z. 61	Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla kształownika stalowego, wymuszenie 1+X, punkt 18, kierunek X.....	155
Rys. Z. 62	Zmiana częstotliwości drgań giętnych i częstotliwości osiowej w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki zespolonej C2.....	155
Rys. Z. 63	Zmiana częstotliwości drgań skrętnych i częstotliwości „zerowej” pasa dolnego w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki zespolonej C2.....	155
Rys. Z. 64	Zmiana częstotliwości drgań giętnych i częstotliwości osiowej w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki zespolonej C2.....	156
Rys. Z. 65	Zmiana częstotliwości drgań skrętnych i częstotliwości „zerowej” pasa dolnego w zależności od zmiany sztywności $K_{R,X}$, dla modelu belki zespolonej C2.....	156
Rys. Z. 66	Zmiana częstotliwości drgań giętnych i częstotliwości osiowej w zależności od zmiany sztywności E_c , dla modelu belki zespolonej C2.....	156
Rys. Z. 67	Zmiana częstotliwości drgań skrętnych i częstotliwości „zerowej” pasa dolnego w zależności od zmiany sztywności E_c , dla modelu belki zespolonej C2.....	157
Rys. Z. 68	Zmiana częstotliwości drgań giętnych i częstotliwości osiowej w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki zespolonej C3.....	157
Rys. Z. 69	Zmiana częstotliwości drgań skrętnych i częstotliwości „zerowej” pasa dolnego w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki zespolonej C3.....	157
Rys. Z. 70	Zmiana częstotliwości drgań giętnych i częstotliwości osiowej w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki zespolonej C3.....	158
Rys. Z. 71	Zmiana częstotliwości drgań skrętnych i częstotliwości „zerowej” pasa dolnego w zależności od zmiany sztywności $K_{R,X}$, dla modelu belki zespolonej C3.....	158
Rys. Z. 72	Zmiana częstotliwości drgań giętnych i częstotliwości osiowej w zależności od zmiany sztywności E_c , dla modelu belki zespolonej C3.....	158
Rys. Z. 73	Zmiana częstotliwości drgań skrętnych i częstotliwości „zerowej” pasa dolnego w zależności od zmiany sztywności E_c , dla modelu belki zespolonej C3.....	159
Rys. Z. 74	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki C1, wymuszenie 2-Z, punkt 2, kierunek Z.....	159
Rys. Z. 75	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki C1, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z.....	159
Rys. Z. 76	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki C1, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z – układ płaski.....	160
Rys. Z. 77	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki C1, wymuszenie 2+X, punkt 33, kierunek X.....	160
Rys. Z. 78	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki C1, wymuszenie 2-Z, punkt 2, kierunek Z.....	160



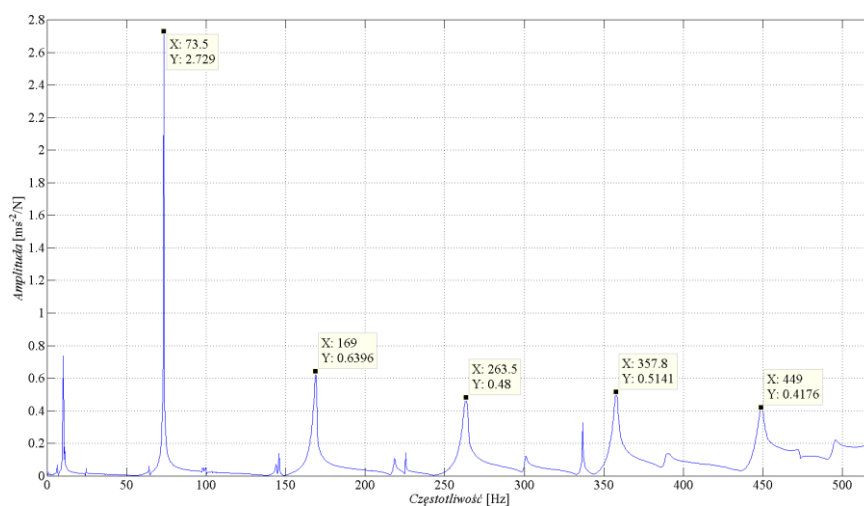
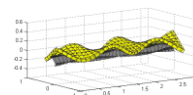
Rys. Z. 79	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki C1, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z	161
Rys. Z. 80	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki C1, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z – układ płaski	161
Rys. Z. 81	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki C1, wymuszenie 2+X, punkt 33, kierunek X	161
Rys. Z. 82	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany zastępczego modułu sprężystości podłużnej betonu E_c , dla modelu belki C1, wymuszenie 2-Z, punkt 36, kierunek Z	162
Rys. Z. 83	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany zastępczego modułu sprężystości podłużnej betonu E_c , dla modelu belki C1, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z	162
Rys. Z. 84	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany zastępczego modułu sprężystości podłużnej betonu E_c , dla modelu belki C1, wymuszenie 2+X, punkt 1, kierunek X	162
Rys. Z. 85	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat betonu η_c , dla modelu belki C1, wymuszenie 2- Z, punkt 2, kierunek Z	163
Rys. Z. 86	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat betonu η_c , dla modelu belki C1, wymuszenie 1- Z, punkt 1, kierunek Z	163
Rys. Z. 87	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat betonu η_c , dla modelu belki C1, wymuszenie 2+X, punkt 3, kierunek X	163
Rys. Z. 88	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat zespolenia η_z , dla modelu belki C1, wymuszenie 2-Z, punkt 2, kierunek Z	164
Rys. Z. 89	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat zespolenia η_z , dla modelu belki C1, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z	164
Rys. Z. 90	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat zespolenia η_z , dla modelu belki C1, wymuszenie 2+X, punkt 33, kierunek X	164
Rys. Z. 91	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki C3, wymuszenie 2-Z, punkt 2, kierunek Z	165
Rys. Z. 92	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki C3, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z	165
Rys. Z. 93	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki C3, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z – układ płaski	165
Rys. Z. 94	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki C3, wymuszenie 2+X, punkt 33, kierunek X	166
Rys. Z. 95	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki C3, wymuszenie 2-Z, punkt 2, kierunek Z	166
Rys. Z. 96	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki C3, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z	166
Rys. Z. 97	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki C3, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z – układ płaski	167



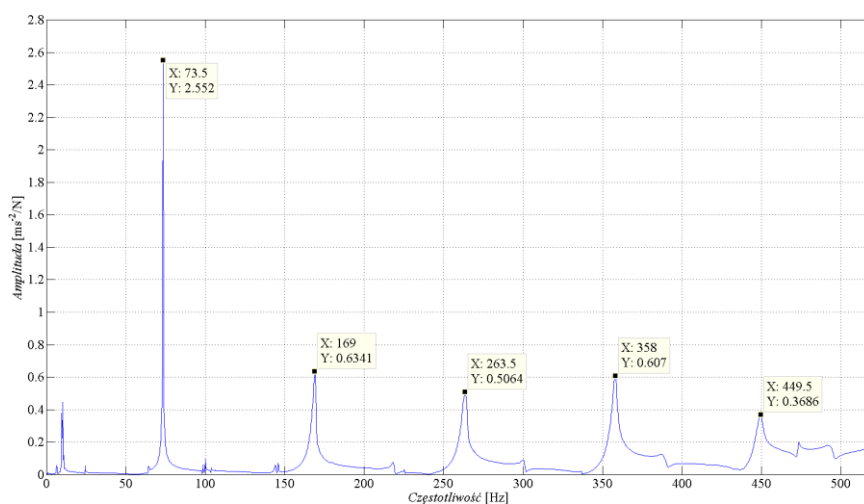
Rys. Z. 98	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki C3, wymuszenie 2+X, punkt 33, kierunek X.....	167
Rys. Z. 99	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany zastępczego modułu sprężystości podłużnej betonu E_c , dla modelu belki C3, wymuszenie 2-Z, punkt 36, kierunek Z	167
Rys. Z. 100	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany zastępczego modułu sprężystości podłużnej betonu E_c , dla modelu belki C3, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z	168
Rys. Z. 101	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany zastępczego modułu sprężystości podłużnej betonu E_c , dla modelu belki C3, wymuszenie 2+X, punkt 1, kierunek X.....	168
Rys. Z. 102	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat betonu η_c , dla modelu belki C3, wymuszenie 2-Z, punkt 2, kierunek Z.....	168
Rys. Z. 103	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat betonu η_c , dla modelu belki C3, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z.....	169
Rys. Z. 104	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat betonu η_c , dla modelu belki C3, wymuszenie 2+X, punkt 3, kierunek X.....	169
Rys. Z. 105	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat zespolenia η_z , dla modelu belki C3, wymuszenie 2-Z, punkt 2, kierunek Z.....	169
Rys. Z. 106	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat zespolenia η_z , dla modelu belki C3, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z.....	170
Rys. Z. 107	Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat zespolenia η_z , dla modelu belki C3, wymuszenie 2+X, punkt 33, kierunek X.....	170
Rys. Z. 108	Porównanie doświadczalnych i obliczeniowych formy drgań giętnych – belka C2: a) 1 _g ; b) 2 _g ; c) 3 _g	170
Rys. Z. 109	Porównanie doświadczalnych i obliczeniowych formy drgań skrętnych – belka C2: a) 1 _s ; b) 2 _s ; c) 3 _s	171
Rys. Z. 110	Porównanie doświadczalnych i obliczeniowych „zerowej” formy drgań pasa dolnego – belka C2.....	171
Rys. Z. 111	Porównanie pierwszej formy drgań giętnych doświadczalnych i obliczeniowej – belka C2: a) 2 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci Δ_ϕ ; c) 4 linia punktów pomiarowych leżących na kształtowniku stalowym	172
Rys. Z. 112	Porównanie drugiej formy drgań giętnych doświadczalnych i obliczeniowej – belka C2: a) 2 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci Δ_ϕ ; c) 4 linia punktów pomiarowych leżących na kształtowniku stalowym	172
Rys. Z. 113	Porównanie trzeciej formy drgań giętnych doświadczalnych i obliczeniowej – belka C2: a) 2 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci Δ_ϕ ; c) 4 linia punktów pomiarowych leżących na kształtowniku stalowym	173
Rys. Z. 114	Porównanie pierwszej formy drgań skrętnych doświadczalnych i obliczeniowej – belka C2: a) 1 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci Δ_ϕ ; c) 3 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej	173
Rys. Z. 115	Porównanie drugiej formy drgań skrętnych doświadczalnych i obliczeniowej – belka C2: a) 1 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci Δ_ϕ ; c) 3 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej	174
Rys. Z. 116	Porównanie trzeciej formy drgań skrętnych doświadczalnych i obliczeniowej – belka C2: a) 1 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci Δ_ϕ ; c) 3 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej	174
Rys. Z. 117	Porównanie doświadczalnych i obliczeniowych formy drgań giętnych – belka C3: a) 1 _g ; b) 2 _g ; c) 3 _g	175
Rys. Z. 118	Porównanie doświadczalnych i obliczeniowych „zerowej” formy drgań pasa dolnego – belka C3.....	175



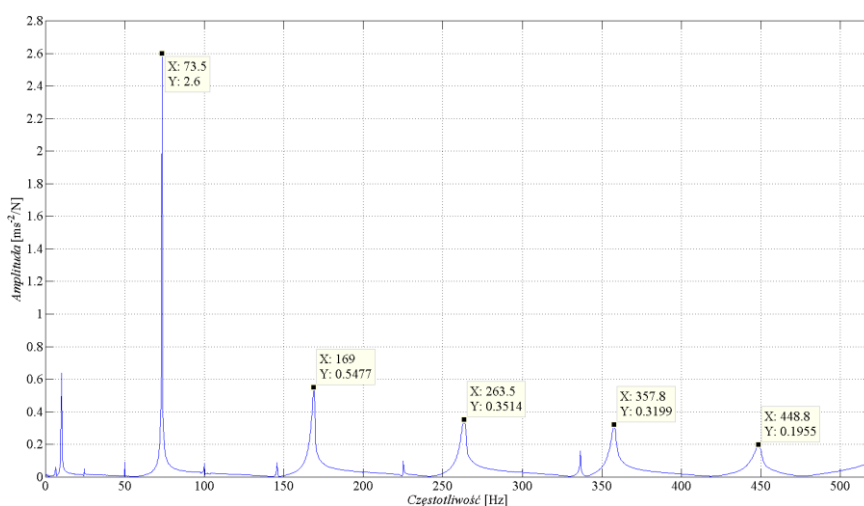
Rys. Z. 119 Porównanie doświadczalnych i obliczeniowych formy drgań skrętnych – belka C3: a) 1s; b) 2s; c) 3s.....	176
Rys. Z. 120 Porównanie pierwszej formy drgań giętej doświadczalnej i obliczeniowej – belka C3: a) 2 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci Δ_ϕ ; c) 4 linia punktów pomiarowych leżących na kształtowniku stalowym	176
Rys. Z. 121 Porównanie drugiej formy drgań giętej doświadczalnej i obliczeniowej – belka C3: a) 2 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci Δ_ϕ ; c) 4 linia punktów pomiarowych leżących na kształtowniku stalowym	177
Rys. Z. 122 Porównanie trzeciej formy drgań giętej doświadczalnej i obliczeniowej – belka C3: a) 2 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci Δ_ϕ ; c) 4 linia punktów pomiarowych leżących na kształtowniku stalowym	177
Rys. Z. 123 Porównanie pierwszej formy drgań skrętnych doświadczalnej i obliczeniowej – belka C3: a) 1 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci Δ_ϕ ; c) 3 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej	178
Rys. Z. 124 Porównanie drugiej formy drgań skrętnych doświadczalnej i obliczeniowej – belka C3: a) 1 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci Δ_ϕ ; c) 3 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej	178
Rys. Z. 125 Porównanie trzeciej formy drgań skrętnych doświadczalnej i obliczeniowej – belka C3: a) 1 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci Δ_ϕ ; c) 3 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej	179
Rys. Z. 126 Porównanie dopasowania postaci drgań skrętnych $\Delta_{\phi,s}$ dla linii 1, dla Estymacji 1, 2 i 3 – belka C2: a) $\Delta_{\phi,1s}$; b) $\Delta_{\phi,2s}$; c) $\Delta_{\phi,3s}$	179
Rys. Z. 127 Porównanie dopasowania postaci drgań giętych $\Delta_{\phi,g}$ dla linii 2, dla Estymacji 1, 2 i 3 – belka C2: a) $\Delta_{\phi,1g}$; b) $\Delta_{\phi,2g}$; c) $\Delta_{\phi,3g}$; d) $\Delta_{\phi,4g}$; e) $\Delta_{\phi,5g}$	180
Rys. Z. 128 Porównanie dopasowania postaci drgań skrętnych $\Delta_{\phi,s}$ dla linii 1, dla Estymacji 1, 2 i 3 – belka C3: a) $\Delta_{\phi,1s}$; b) $\Delta_{\phi,2s}$; c) $\Delta_{\phi,3s}$	181
Rys. Z. 129 Porównanie dopasowania postaci drgań giętych $\Delta_{\phi,g}$ dla linii 2, dla Estymacji 1, 2 i 3 – belka C3: a) $\Delta_{\phi,1g}$; b) $\Delta_{\phi,2g}$; c) $\Delta_{\phi,3g}$; d) $\Delta_{\phi,4g}$; e) $\Delta_{\phi,5g}$	182
Rys. Z. 130 Porównanie doświadczalnego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia przyspieszeń dla belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, punktu 1, kierunek Z, ESTAMACJA 1	183
Rys. Z. 131 Porównanie doświadczalnego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia przyspieszeń dla belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, punktu 36, kierunek Z, ESTAMACJA 1	183
Rys. Z. 132 Porównanie doświadczalnego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia przyspieszeń dla belki zespolonej C2, wymuszenie 1-Z, punktu 1, kierunek Z, ESTAMACJA 2	184
Rys. Z. 133 Porównanie doświadczalnego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia przyspieszeń dla belki zespolonej C2, wymuszenie 1-Z, punktu 35, kierunek Z, ESTAMACJA 2	184
Rys. Z. 134 Porównanie doświadczalnego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia przyspieszeń dla belki zespolonej C3, wymuszenie 2-Z, punktu 2, kierunek Z, ESTAMACJA 1	185
Rys. Z. 135 Porównanie doświadczalnego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia przyspieszeń dla belki zespolonej C3, wymuszenie 2-Z, punktu 4, kierunek Z, ESTAMACJA 1	185
Rys. Z. 136 Porównanie doświadczalnego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia przyspieszeń dla belki zespolonej C3, wymuszenie 1-Z, punktu 34, kierunek Z, ESTAMACJA 1	186
Rys. Z. 137 Porównanie doświadczalnego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia przyspieszeń dla belki zespolonej C3, wymuszenie 1-Z, punktu 36, kierunek Z, ESTAMACJA 1	186



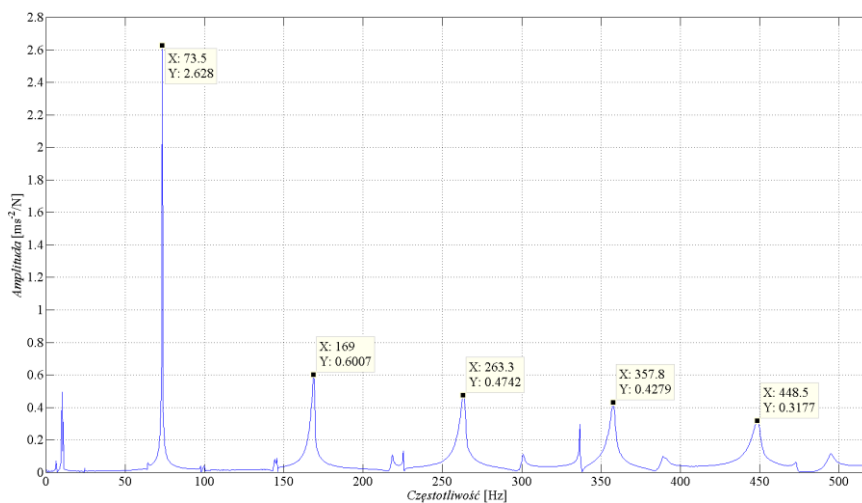
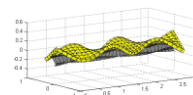
Rys. Z. 1 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 2-Z, punkt 1, kierunek Z



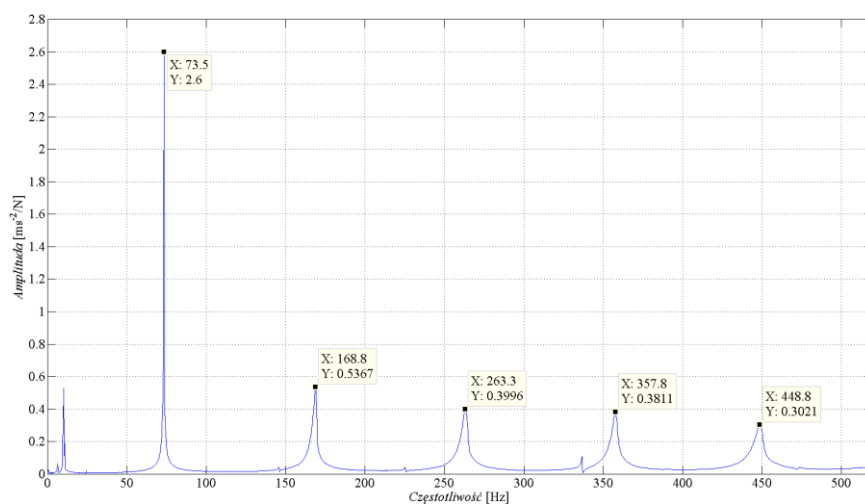
Rys. Z. 2 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 2-Z, punkt 3, kierunek Z



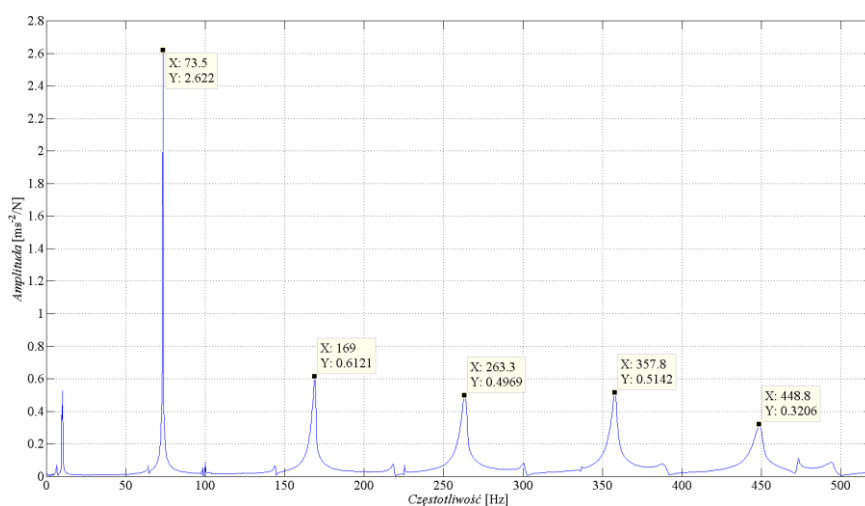
Rys. Z. 3 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 2-Z, punkt 4, kierunek Z



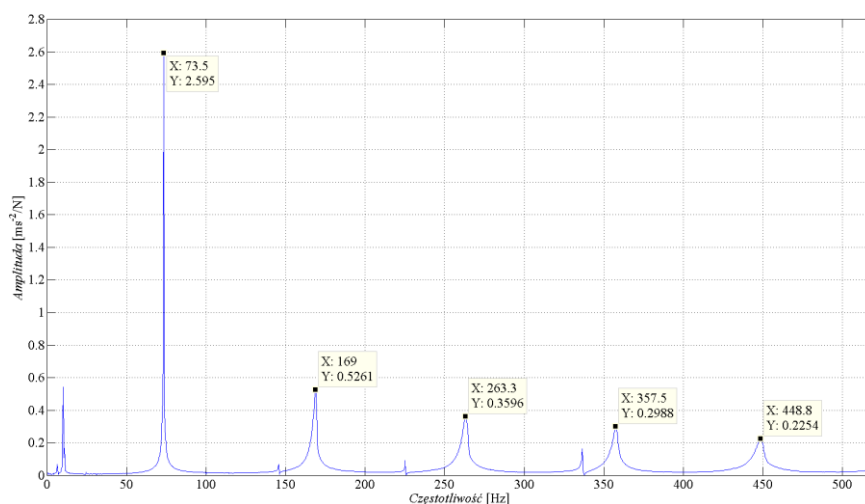
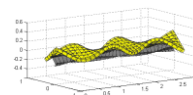
Rys. Z. 4 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 2-Z, punkt 33, kierunek Z



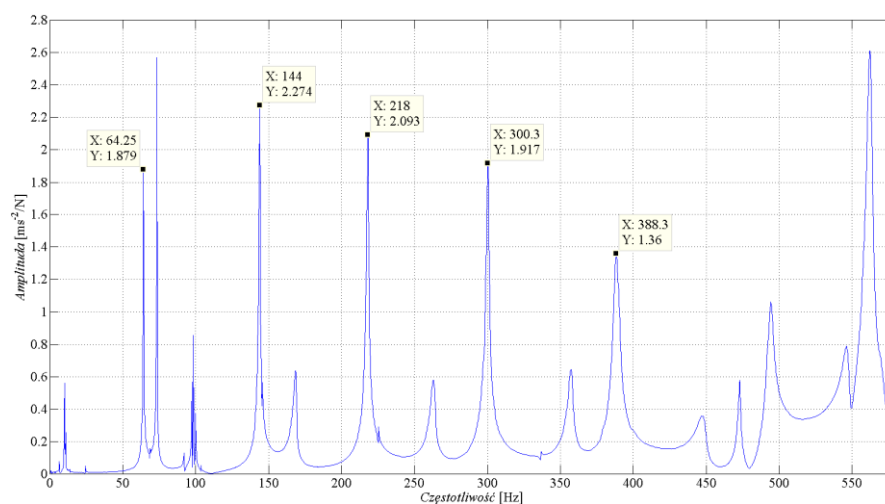
Rys. Z. 5 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 2-Z, punkt 34, kierunek Z



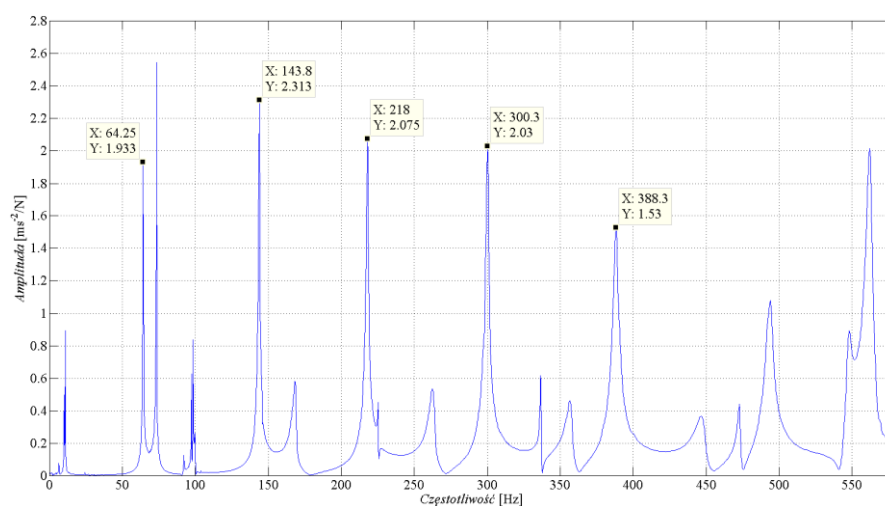
Rys. Z. 6 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 2-Z, punkt 35, kierunek Z



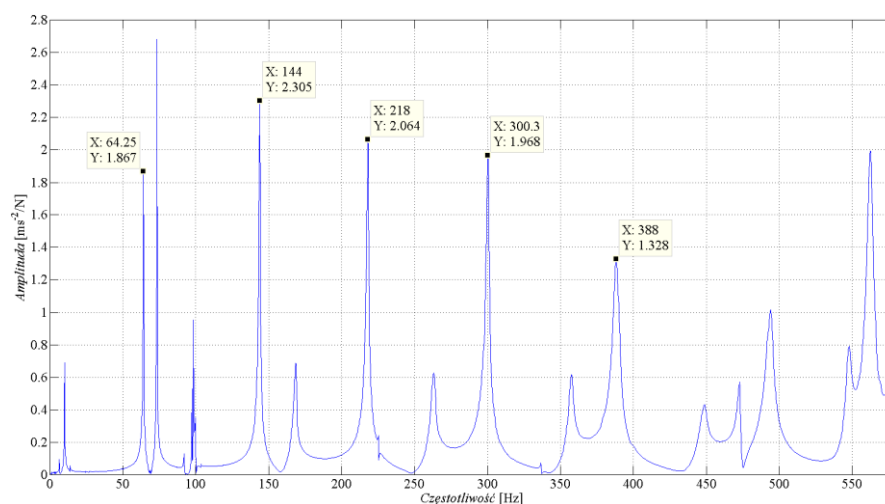
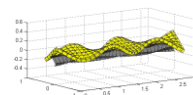
Rys. Z. 7 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 2-Z, punkt 36, kierunek Z



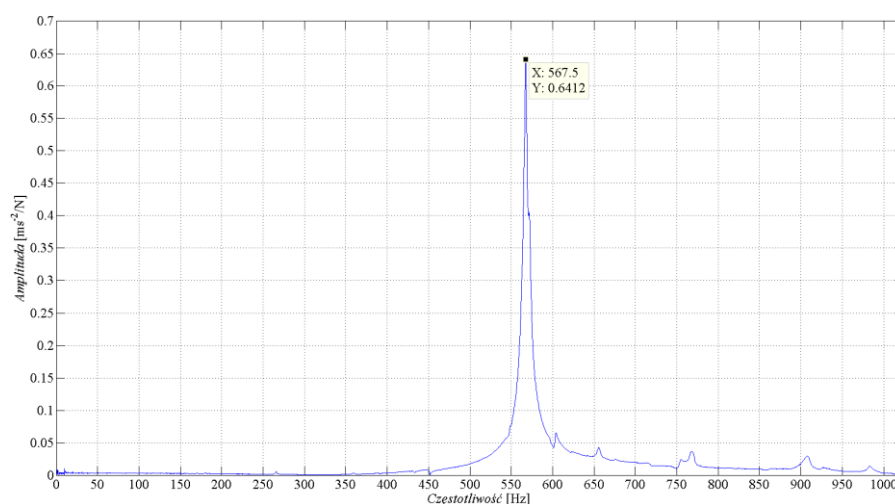
Rys. Z. 8 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 1-Z, punkt 3, kierunek Z



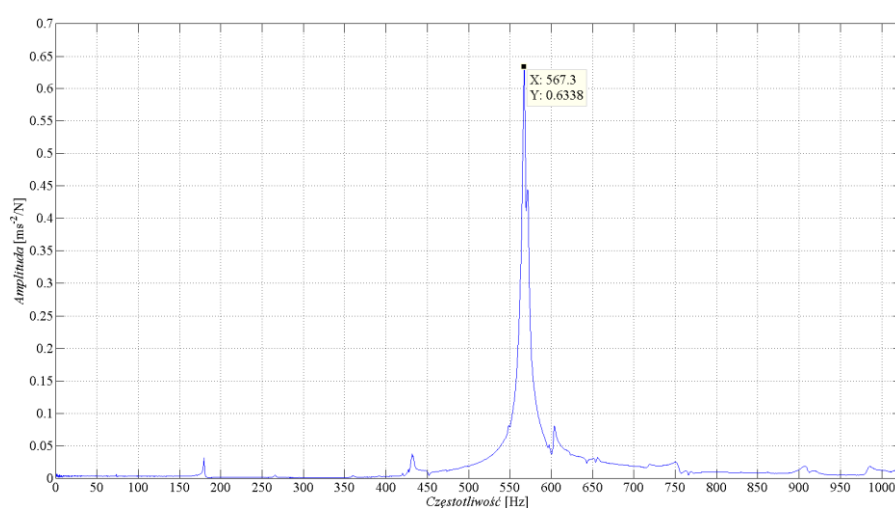
Rys. Z. 9 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 1-Z, punkt 33, kierunek Z



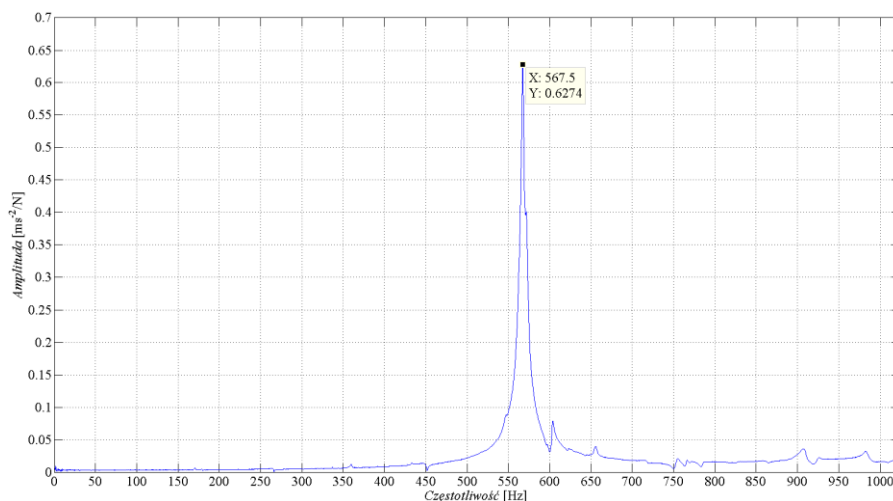
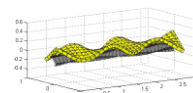
Rys. Z. 10 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 1-Z, punkt 35, kierunek Z



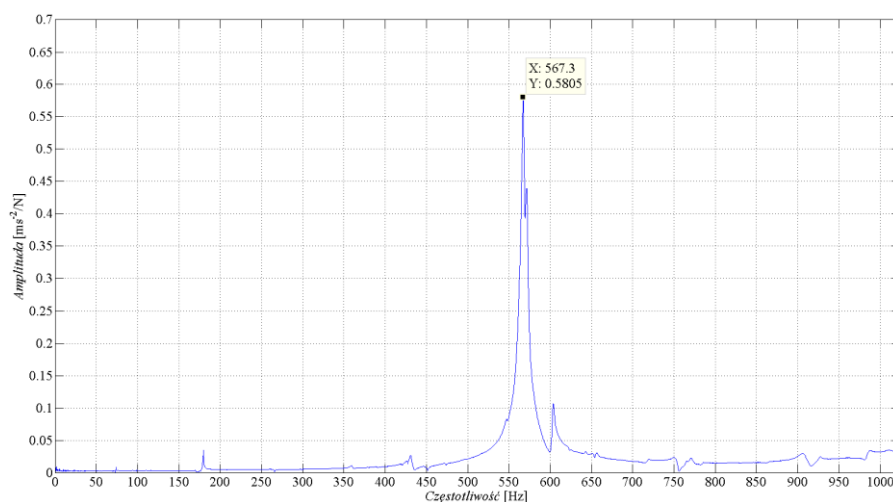
Rys. Z. 11 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 2+X, punkt 1, kierunek X



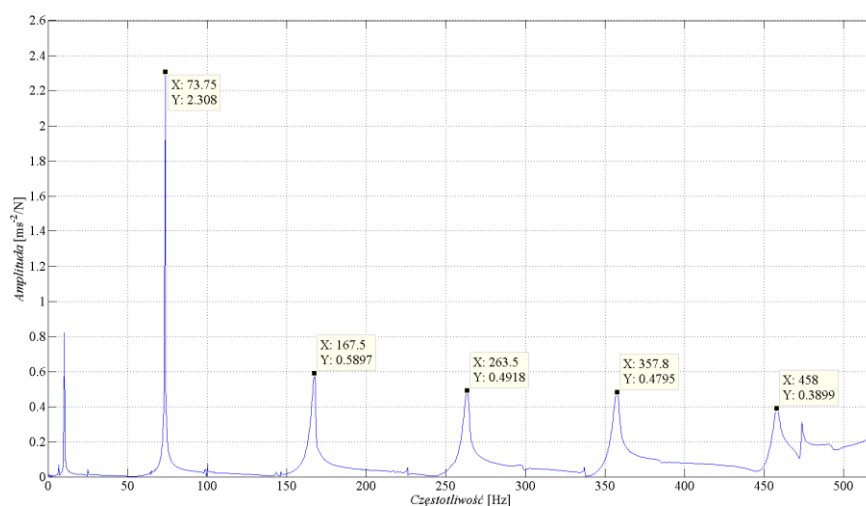
Rys. Z. 12 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 2+X, punkt 3, kierunek X



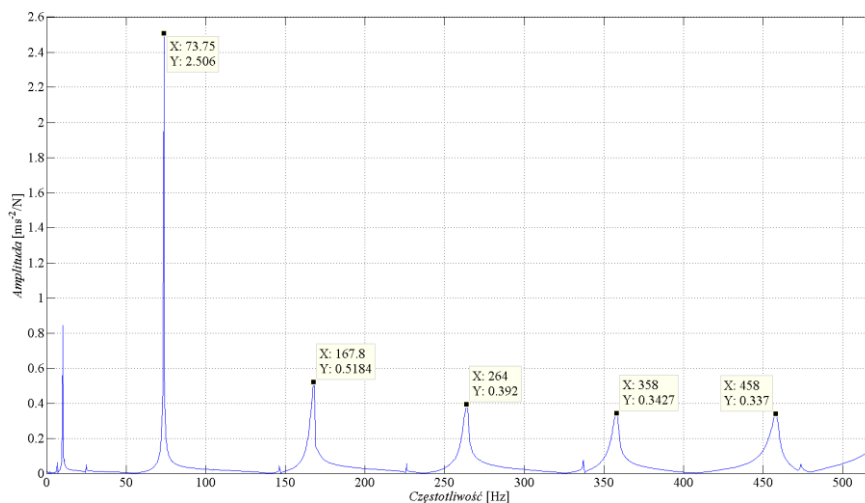
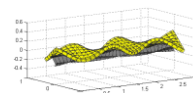
Rys. Z. 13 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 2+X, punkt 33, kierunek X



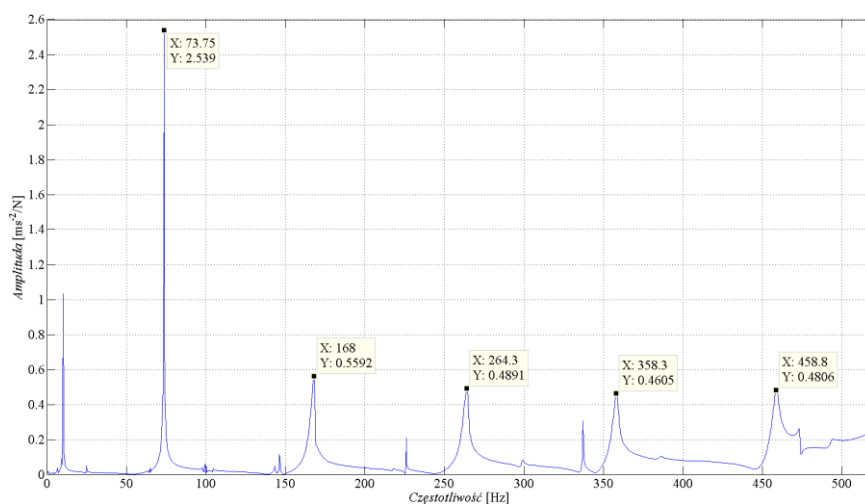
Rys. Z. 14 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C1, wymuszenie 2+X, punkt 35, kierunek X



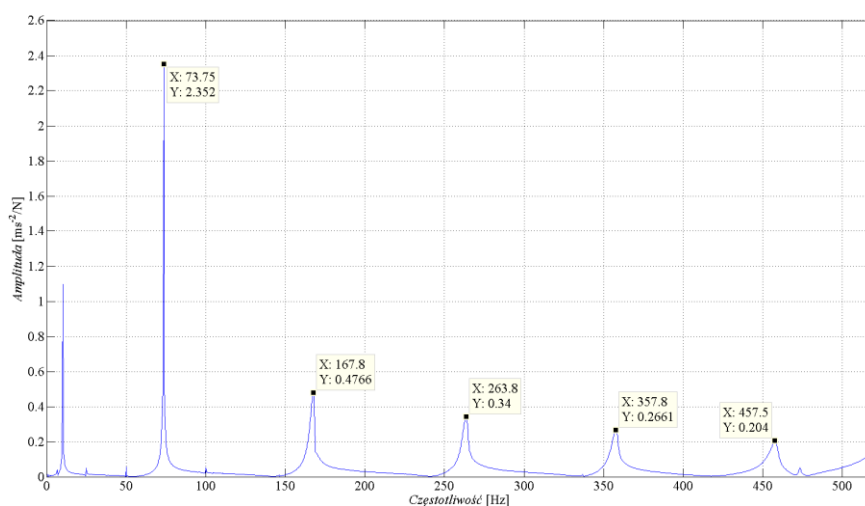
Rys. Z. 15 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, punkt 1, kierunek Z



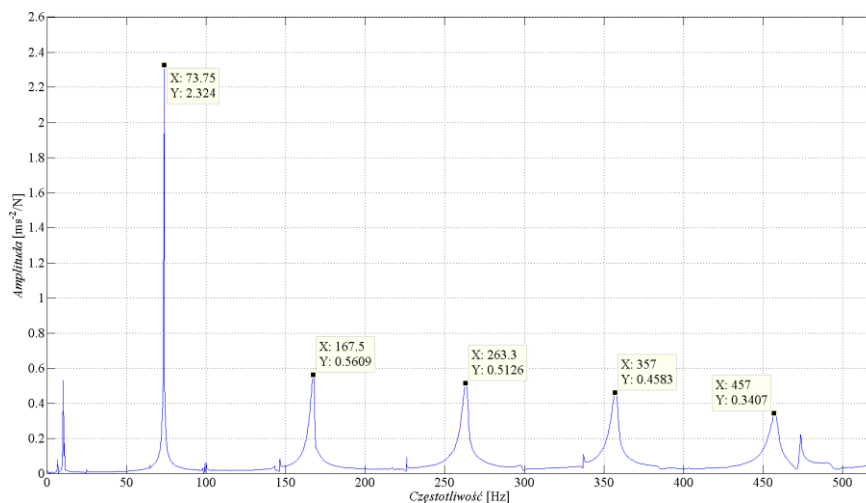
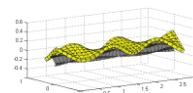
Rys. Z. 16 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, punkt 2, kierunek Z



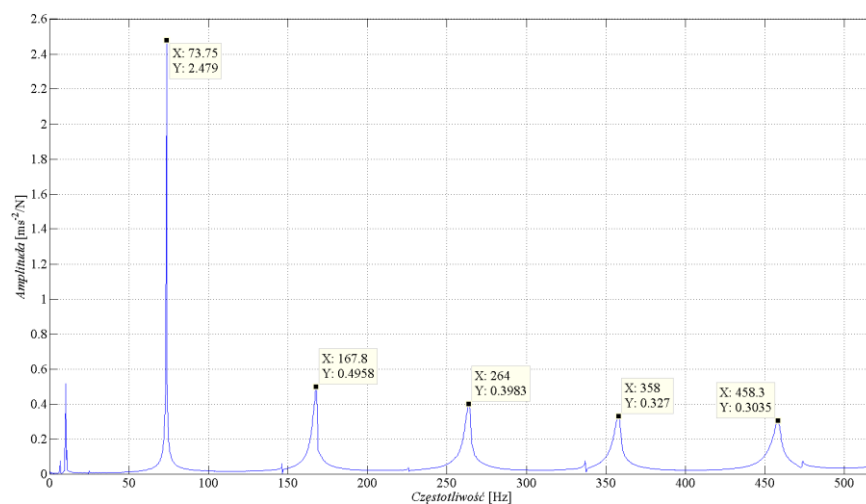
Rys. Z. 17 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, punkt 3, kierunek Z



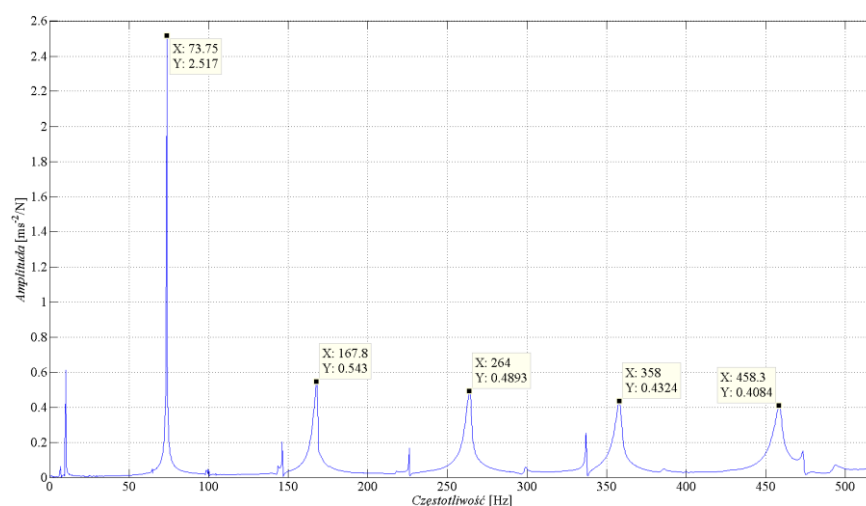
Rys. Z. 18 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, punkt 4, kierunek Z



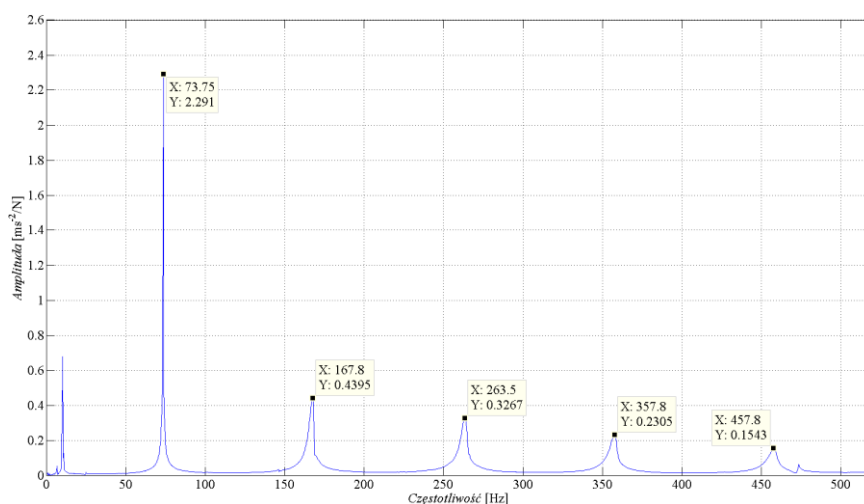
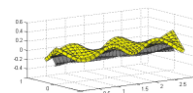
Rys. Z. 19 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, punkt 33, kierunek Z



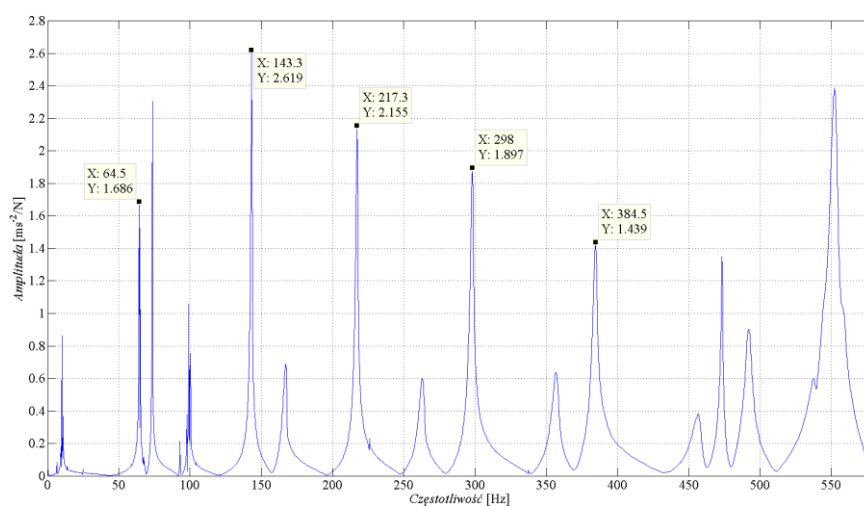
Rys. Z. 20 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, punkt 34, kierunek Z



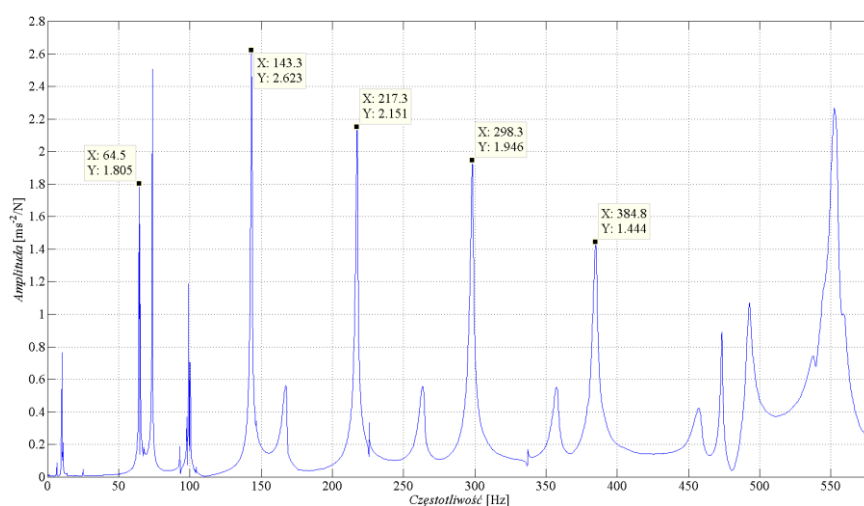
Rys. Z. 21 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, punkt 35, kierunek Z



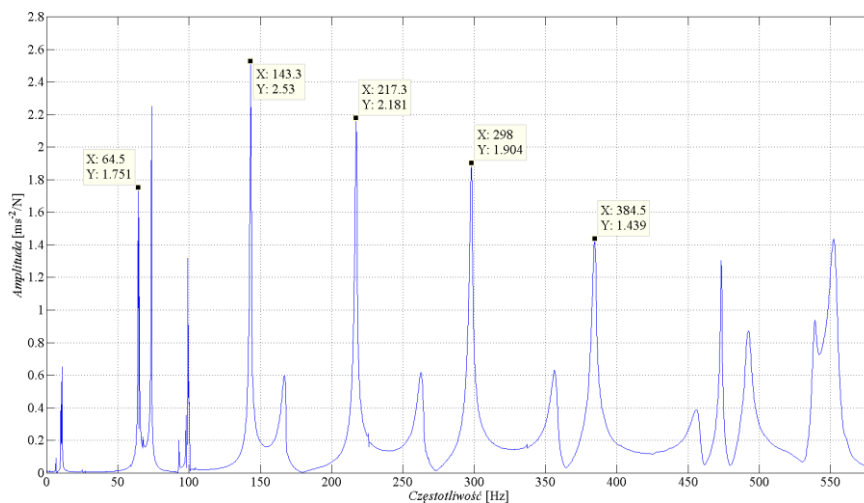
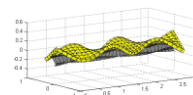
Rys. Z. 22 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, punkt 36, kierunek Z



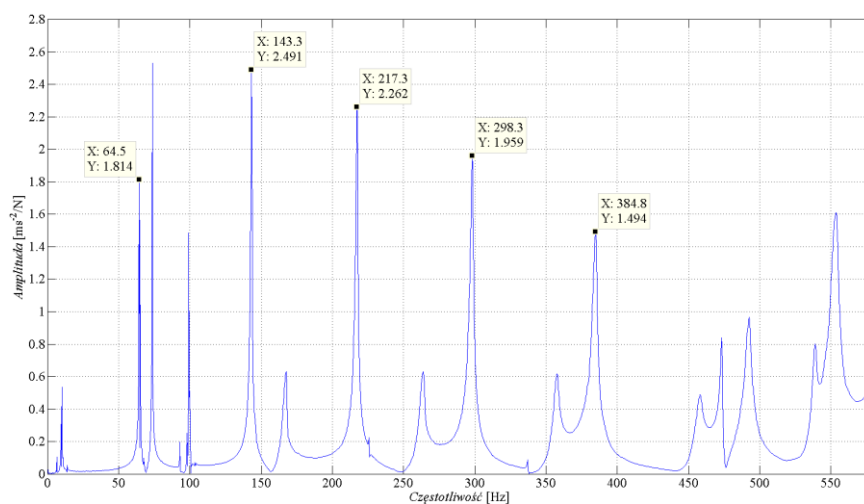
Rys. Z. 23 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z



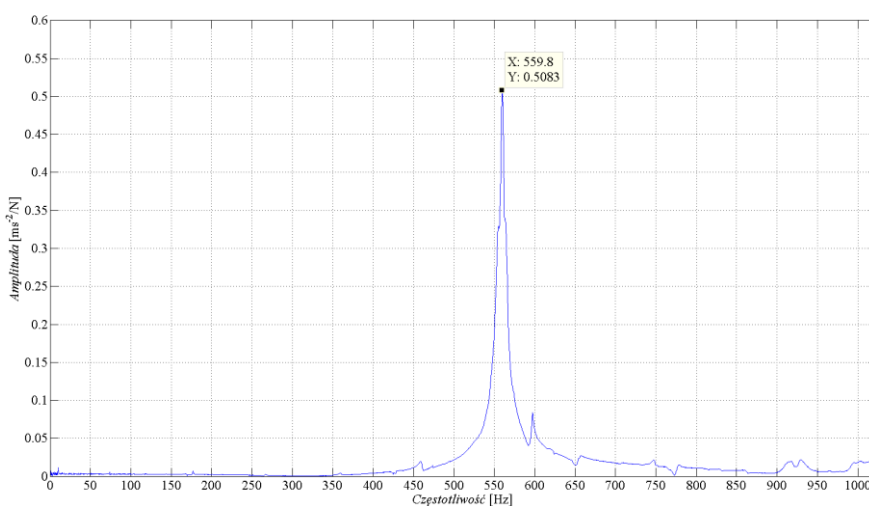
Rys. Z. 24 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 1-Z, punkt 3, kierunek Z



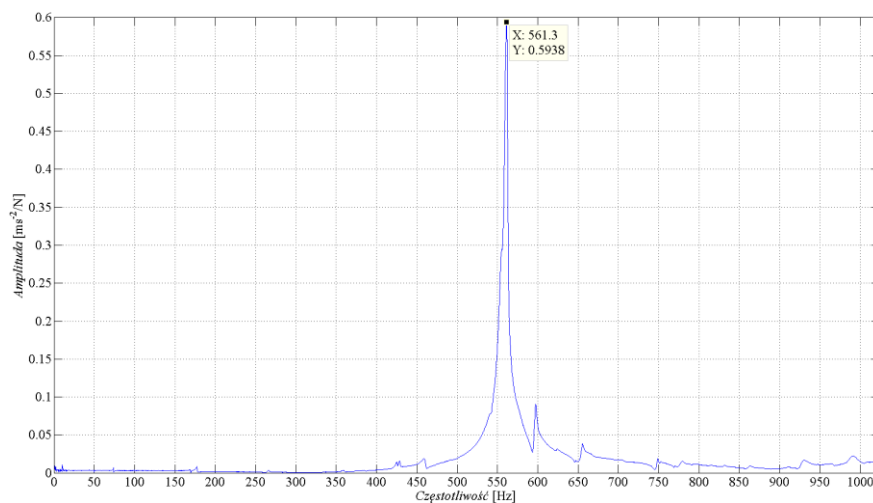
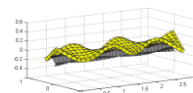
Rys. Z. 25 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 1-Z, punkt 33, kierunek Z



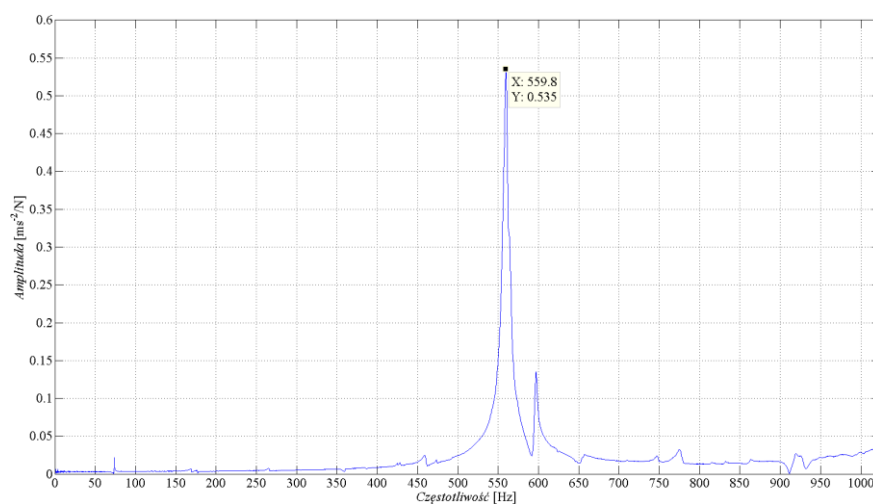
Rys. Z. 26 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 1-Z, punkt 35, kierunek Z



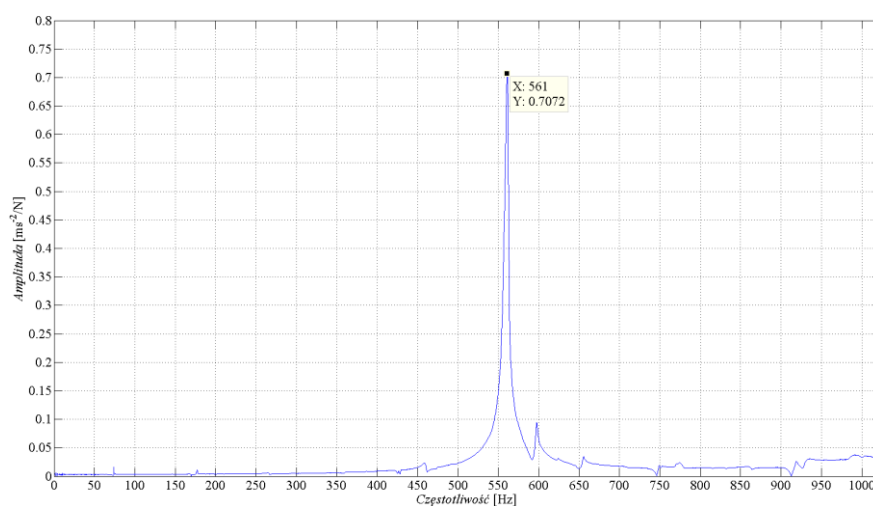
Rys. Z. 27 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 2+X, punkt 1, kierunek X



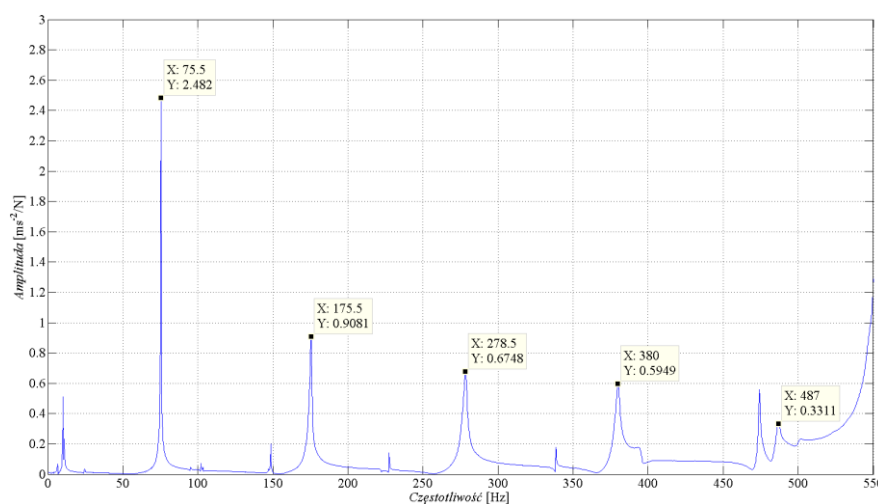
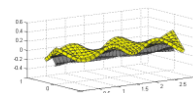
Rys. Z. 28 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 2+X, punkt 3, kierunek X



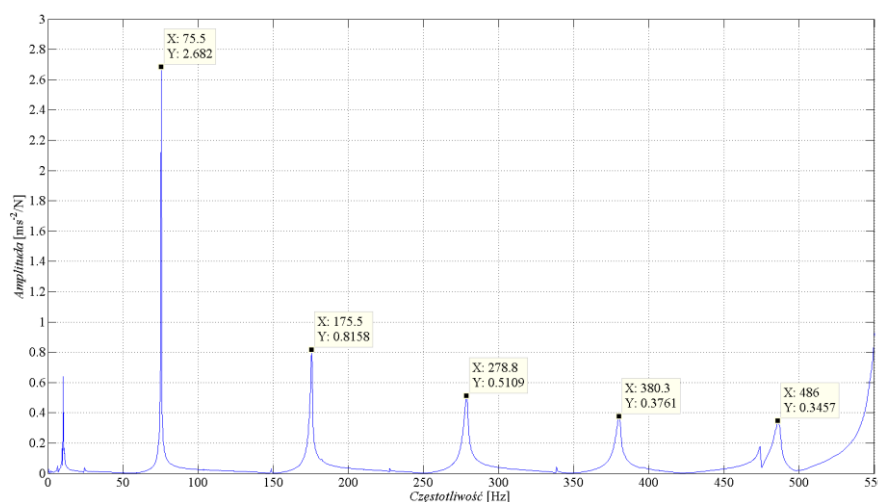
Rys. Z. 29 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 2+X, punkt 33, kierunek X



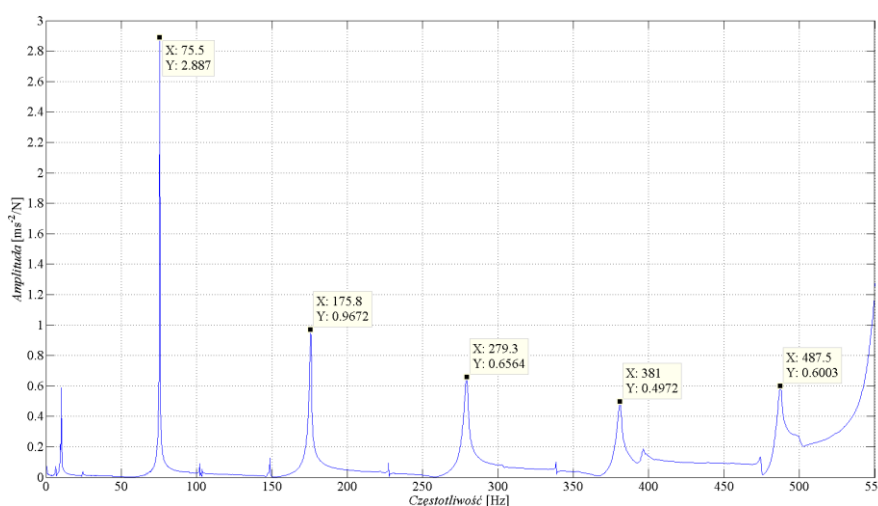
Rys. Z. 30 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C2, wymuszenie 2+X, punkt 35, kierunek X



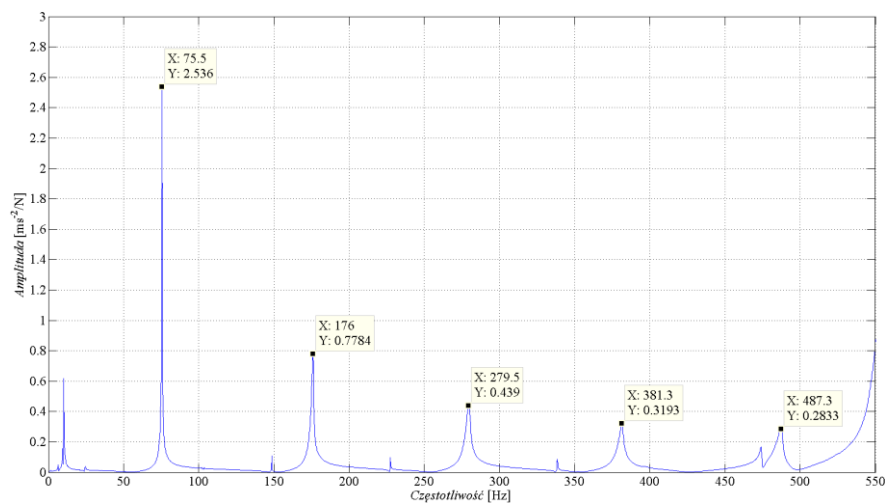
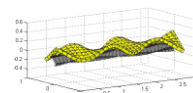
Rys. Z. 31 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 2-Z, punkt 1, kierunek Z



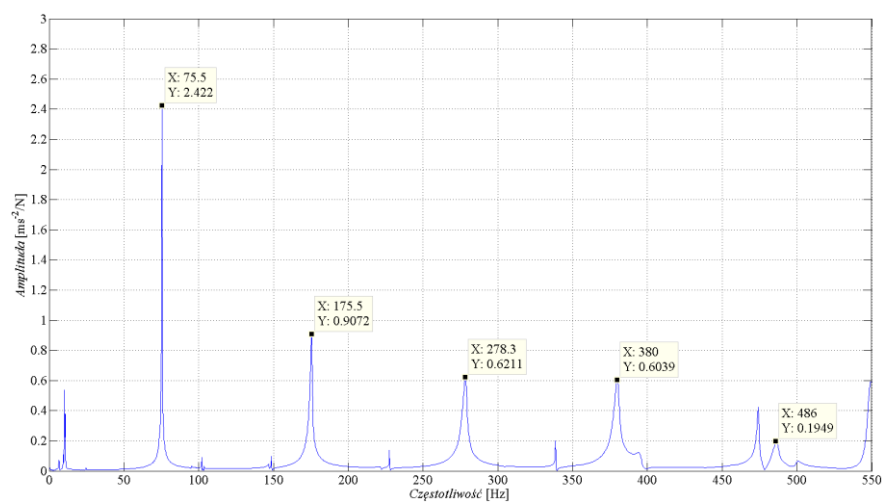
Rys. Z. 32 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 2-Z, punkt 2, kierunek Z



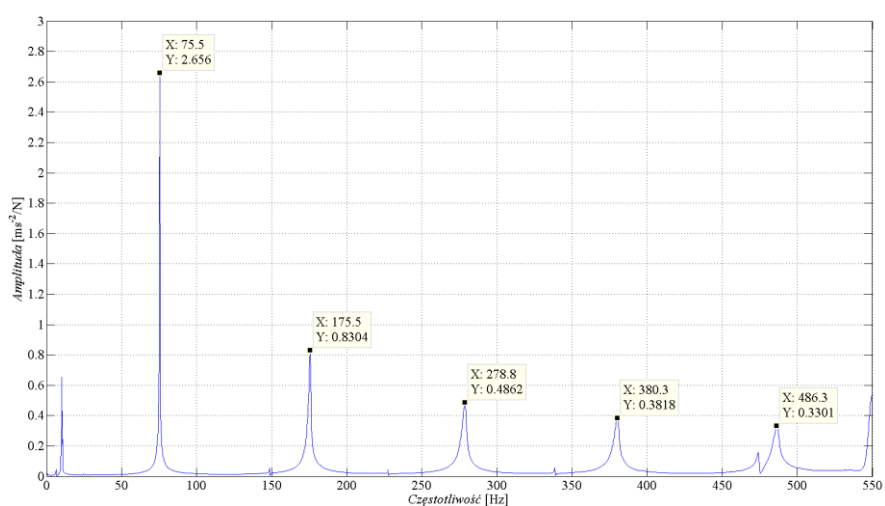
Rys. Z. 33 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 2-Z, punkt 3, kierunek Z



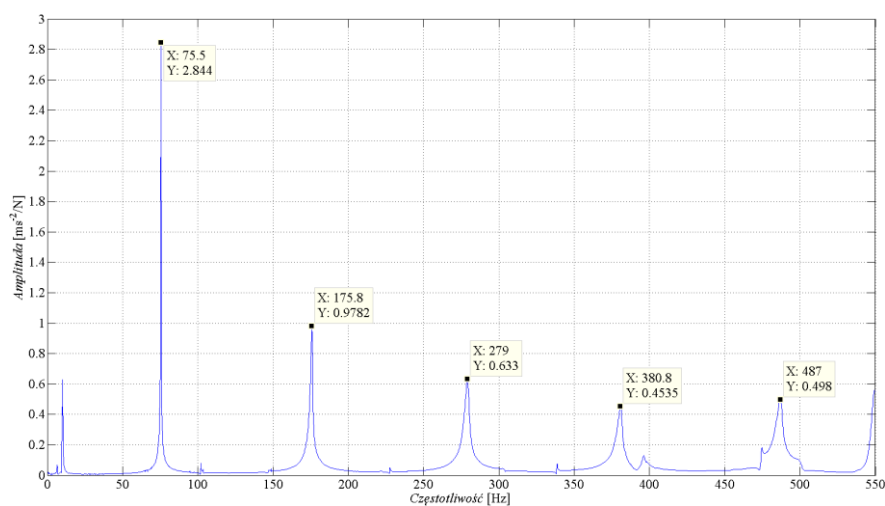
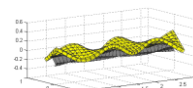
Rys. Z. 34 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 2-Z, punkt 4, kierunek Z



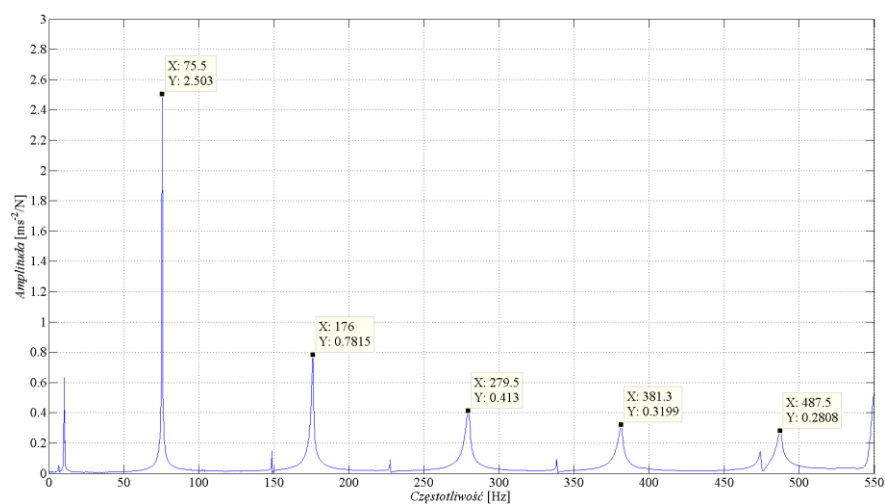
Rys. Z. 35 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 2-Z, punkt 33, kierunek Z



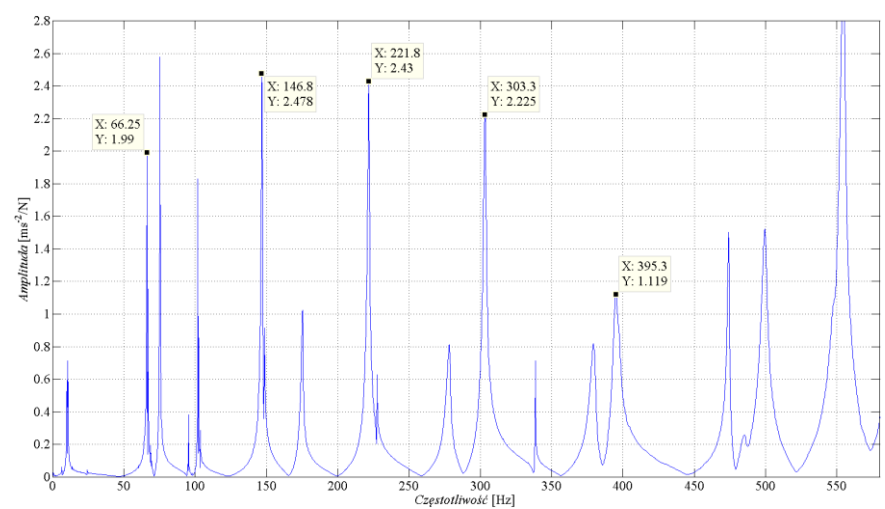
Rys. Z. 36 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 2-Z, punkt 34, kierunek Z



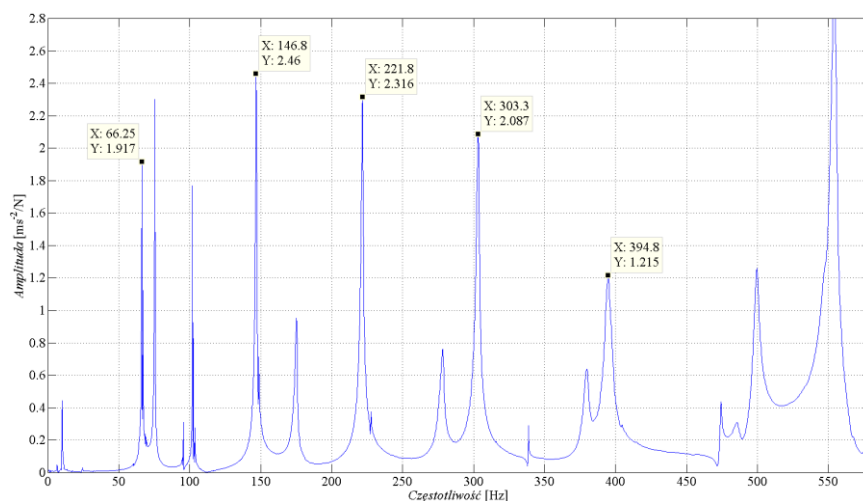
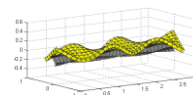
Rys. Z. 37 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 2-Z, punkt 35, kierunek Z



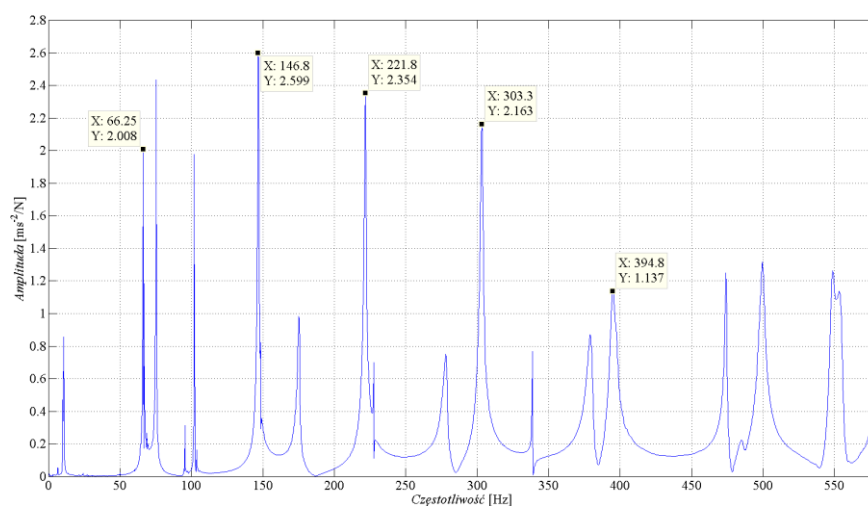
Rys. Z. 38 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 2-Z, punkt 36, kierunek Z



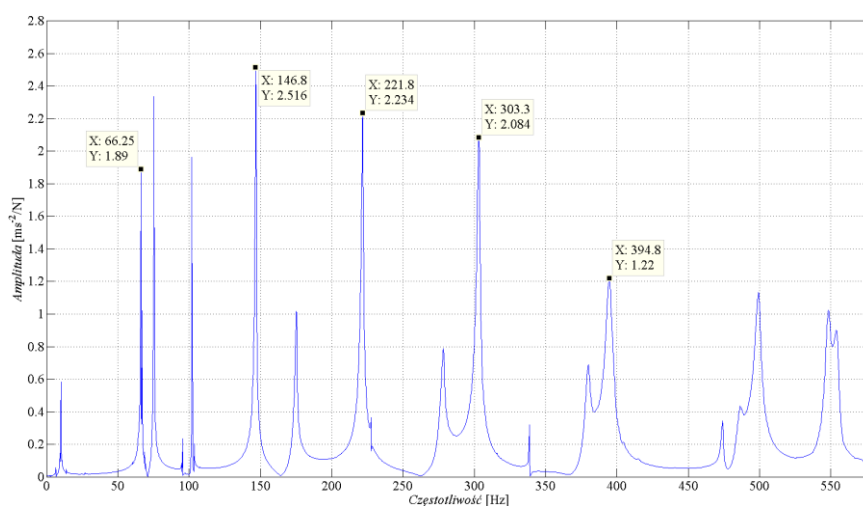
Rys. Z. 39 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z



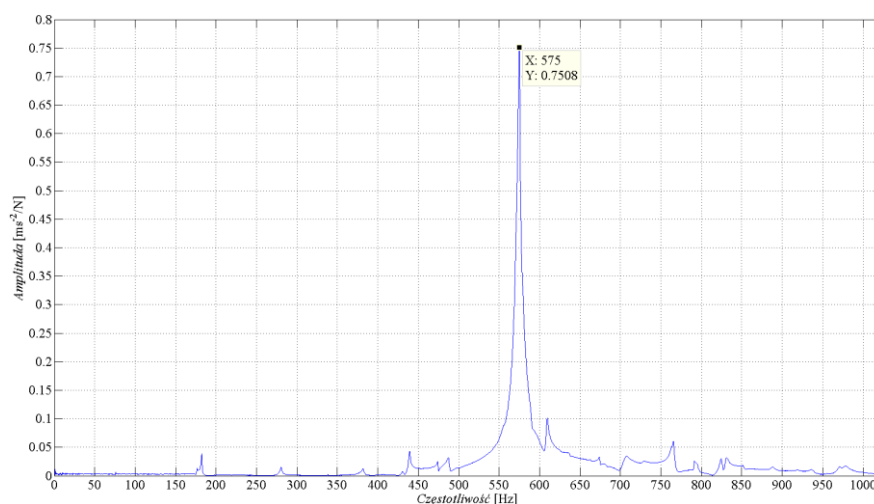
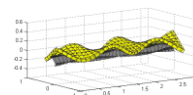
Rys. Z. 40 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 1-Z, punkt 3, kierunek Z



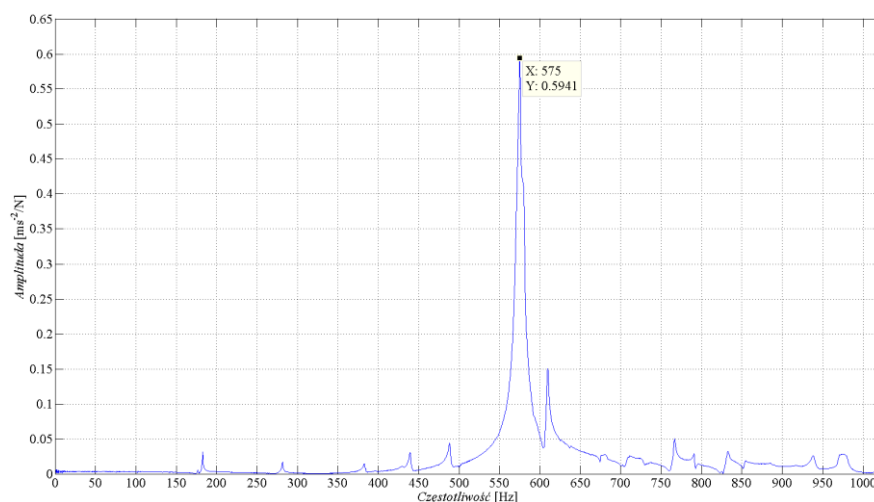
Rys. Z. 41 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 1-Z, punkt 33, kierunek Z



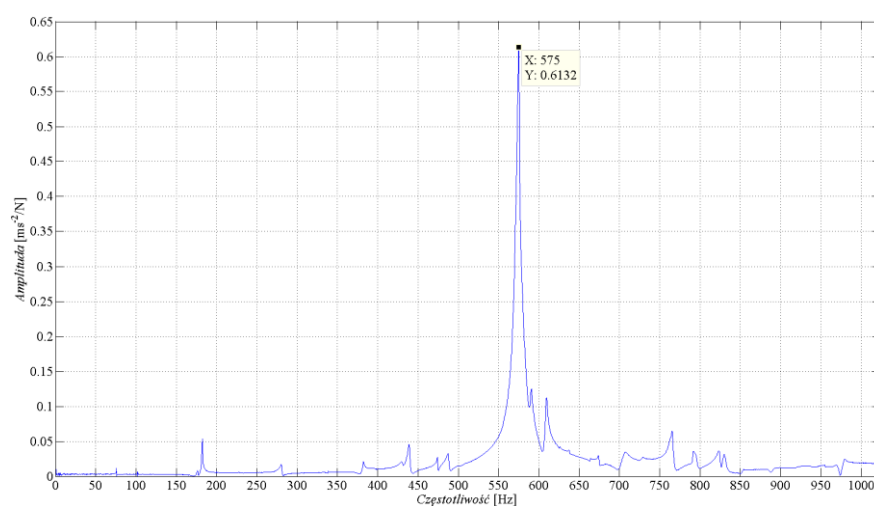
Rys. Z. 42 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 1-Z, punkt 35, kierunek Z



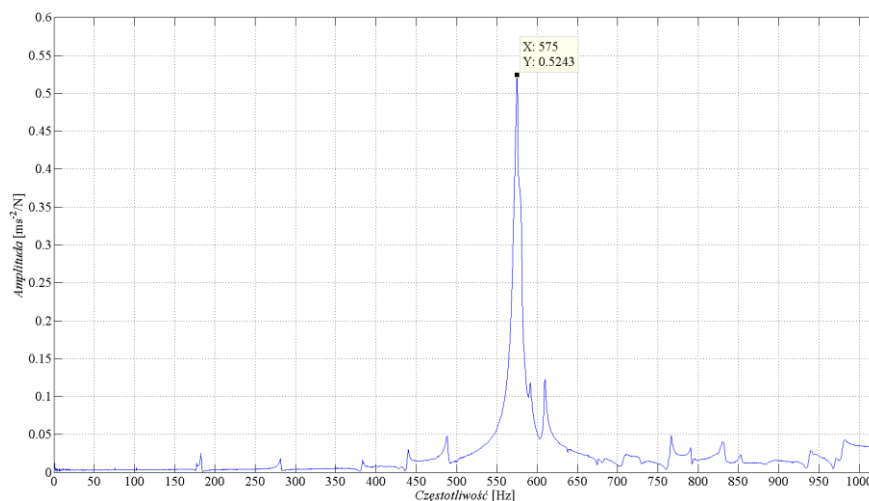
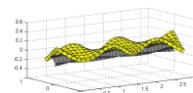
Rys. Z. 43 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 2+X, punkt 1, kierunek X



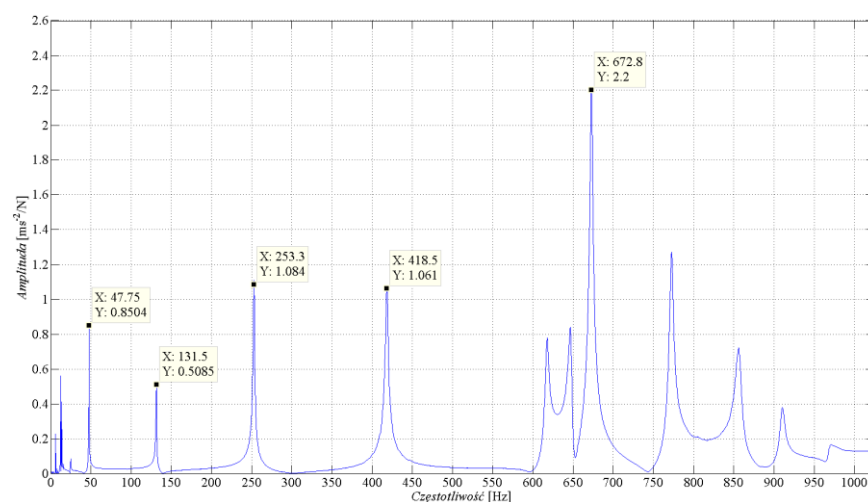
Rys. Z. 44 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 2+X, punkt 3, kierunek X



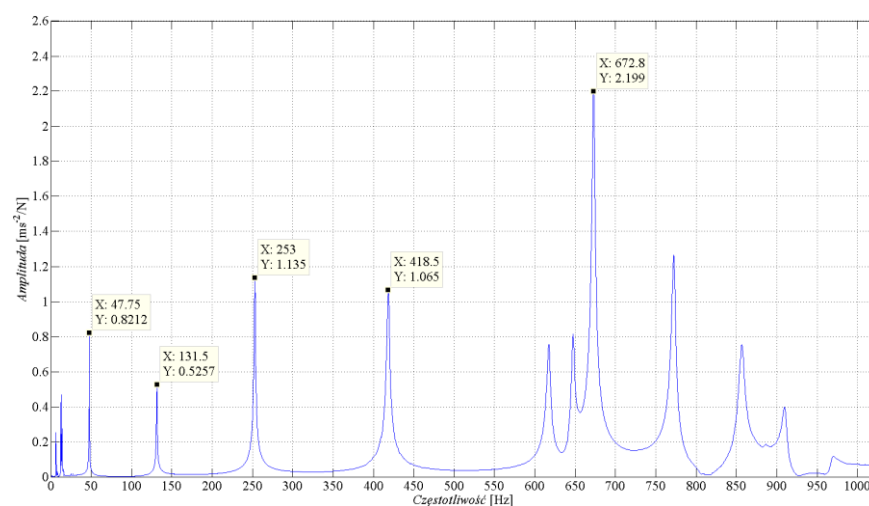
Rys. Z. 45 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 2+X, punkt 33, kierunek X



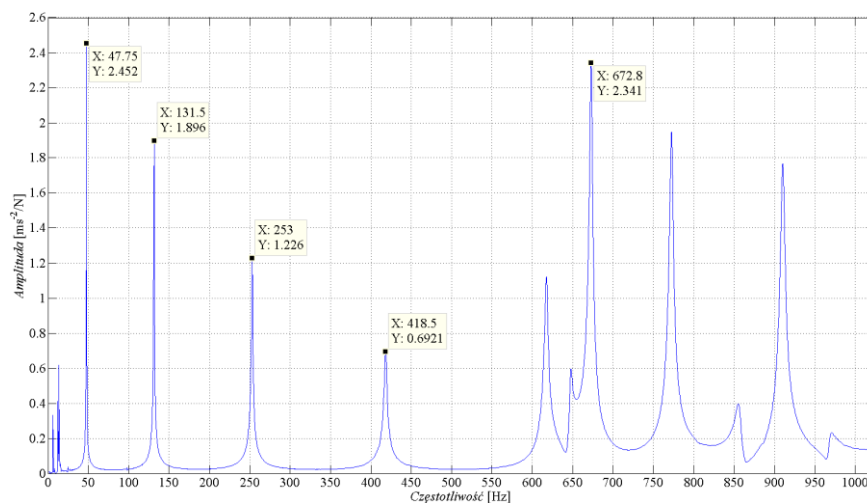
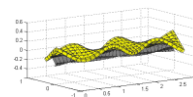
Rys. Z. 46 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia belki zespolonej C3, wymuszenie 2+X, punkt 35, kierunek X



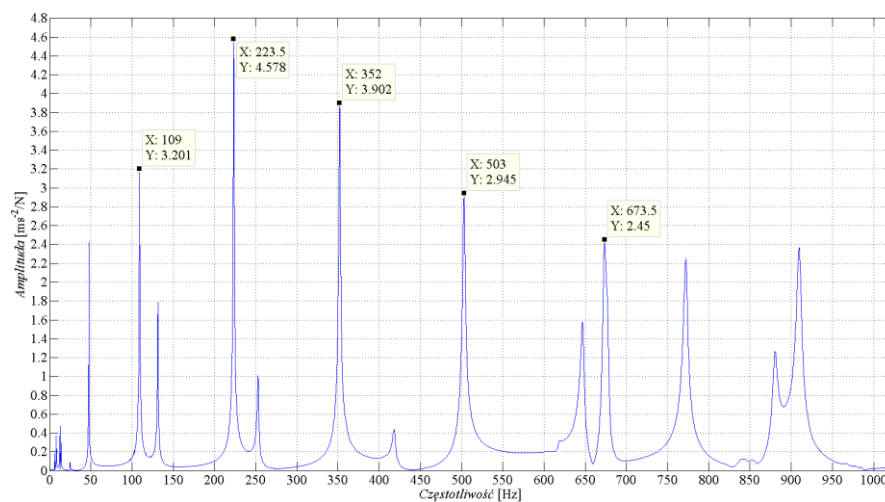
Rys. Z. 47 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla płyty żelbetowej, wymuszenie 2-Z, punkt 5, kierunek Z



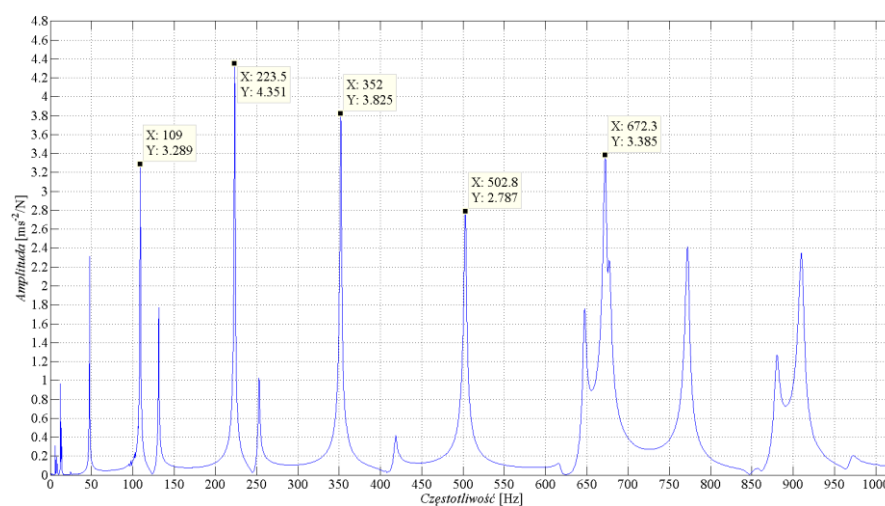
Rys. Z. 48 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla płyty żelbetowej, wymuszenie 2-Z, punkt 23, kierunek Z



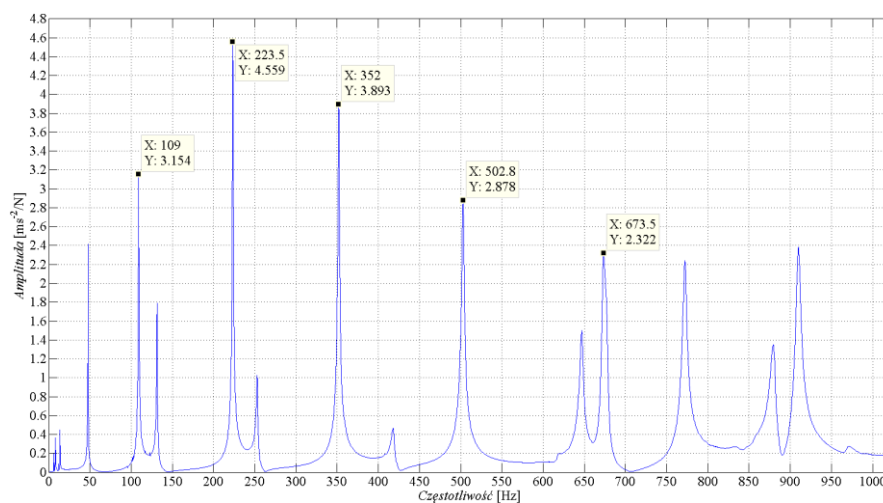
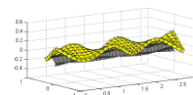
Rys. Z. 49 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla płyty żelbetowej, wymuszenie 2-Z, punkt 26, kierunek Z



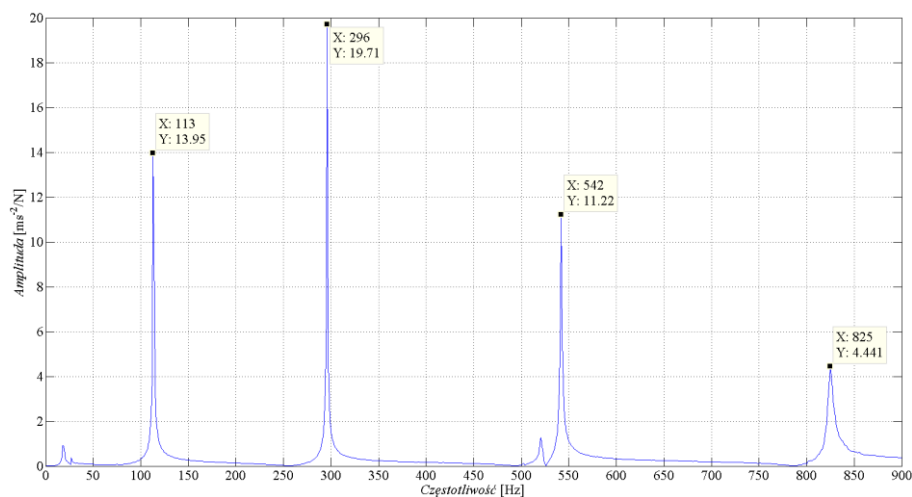
Rys. Z. 50 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla płyty żelbetowej, wymuszenie 1-Z, punkt 3, kierunek Z



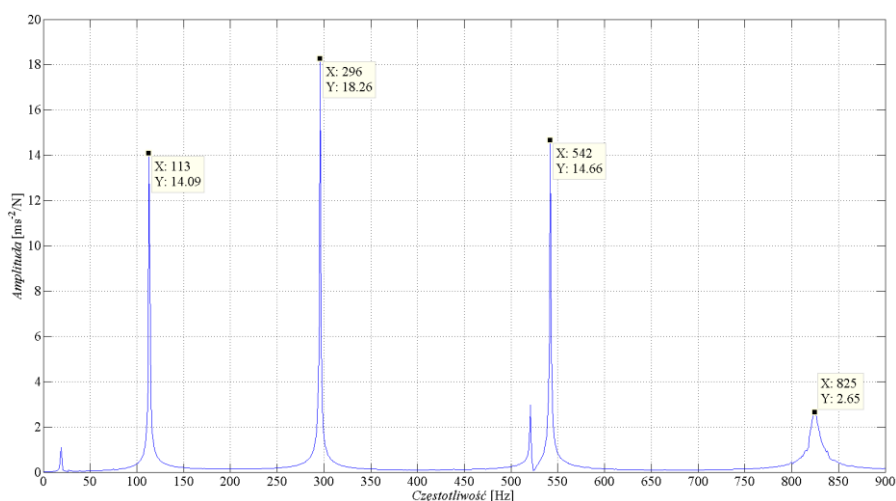
Rys. Z. 51 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla płyty żelbetowej, wymuszenie 1-Z, punkt 25, kierunek Z



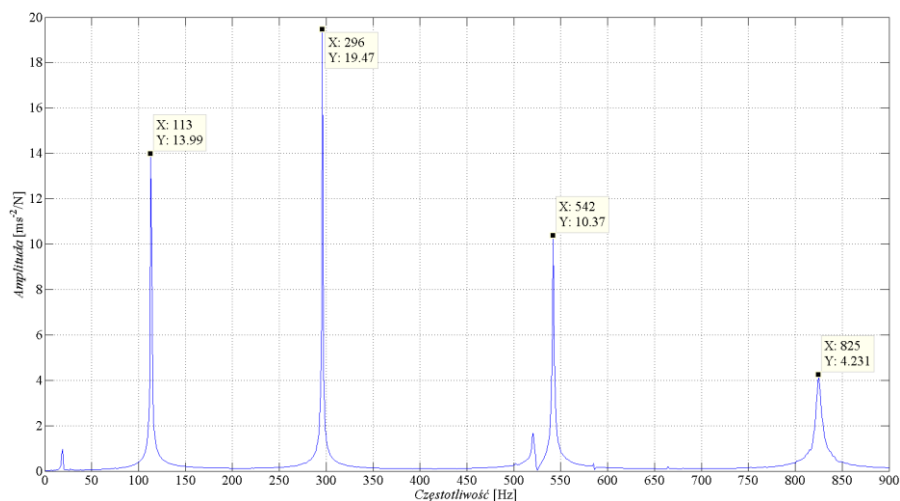
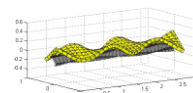
Rys. Z. 52 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla płyty żelbetowej, wymuszenie 1-Z, punkt 27, kierunek Z



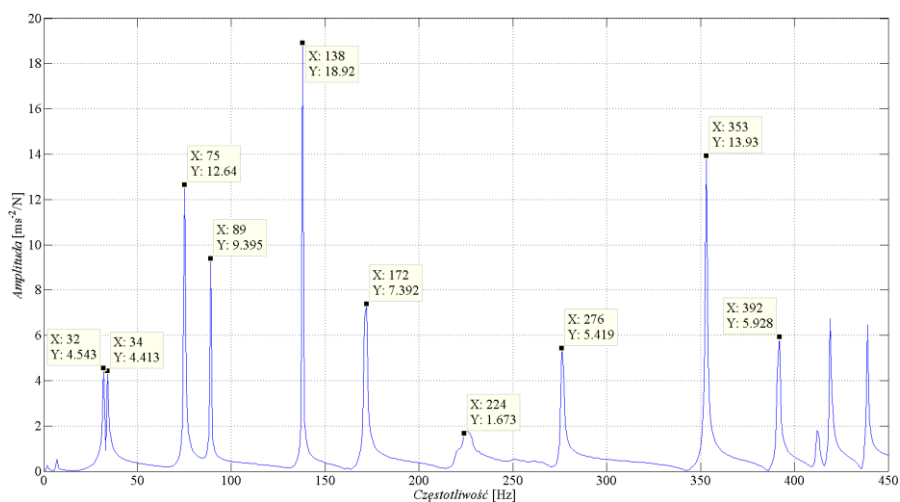
Rys. Z. 53 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla kształtownika stalowego, wymuszenie 1-Z, punkt 2, kierunek Z



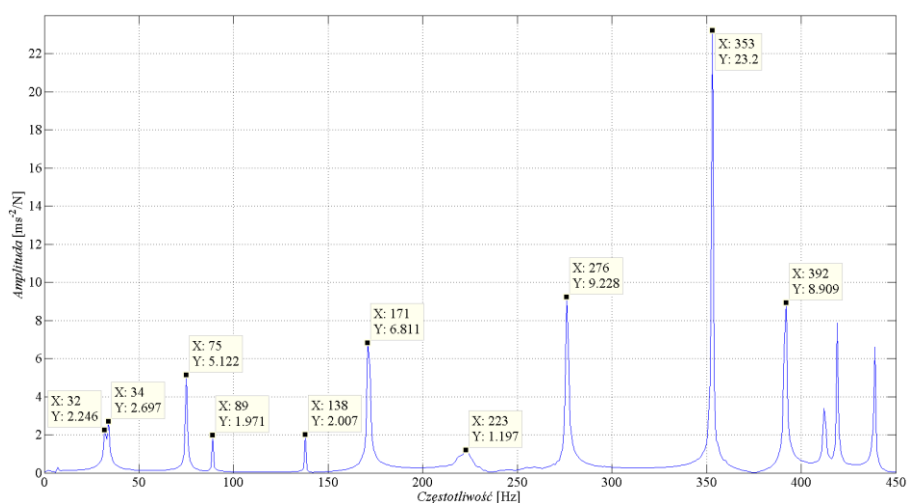
Rys. Z. 54 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla kształtownika stalowego, wymuszenie 1-Z, punkt 17, kierunek Z



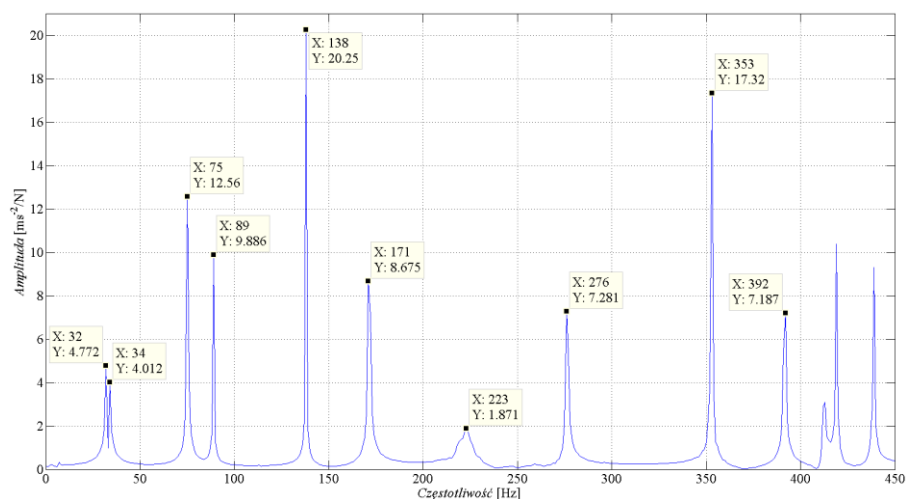
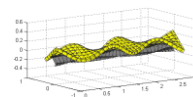
Rys. Z. 55 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla kształtownika stalowego, wymuszenie 1-Z, punkt 18, kierunek Z



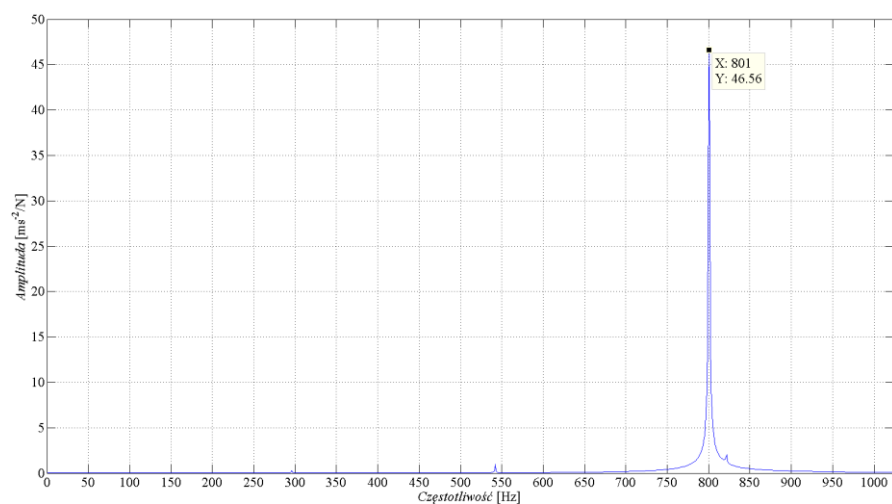
Rys. Z. 56 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla kształtownika stalowego, wymuszenie 2+Y, punkt 1, kierunek Y



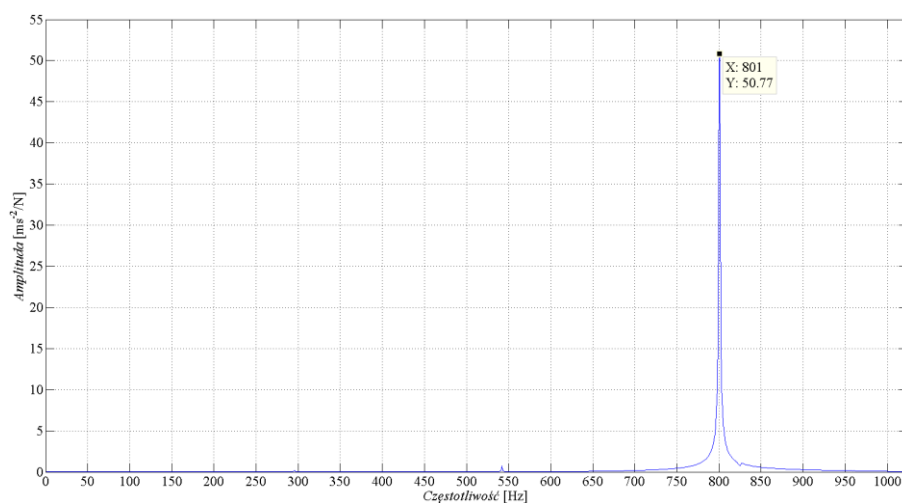
Rys. Z. 57 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla kształtownika stalowego, wymuszenie 2+Y, punkt 16, kierunek Y



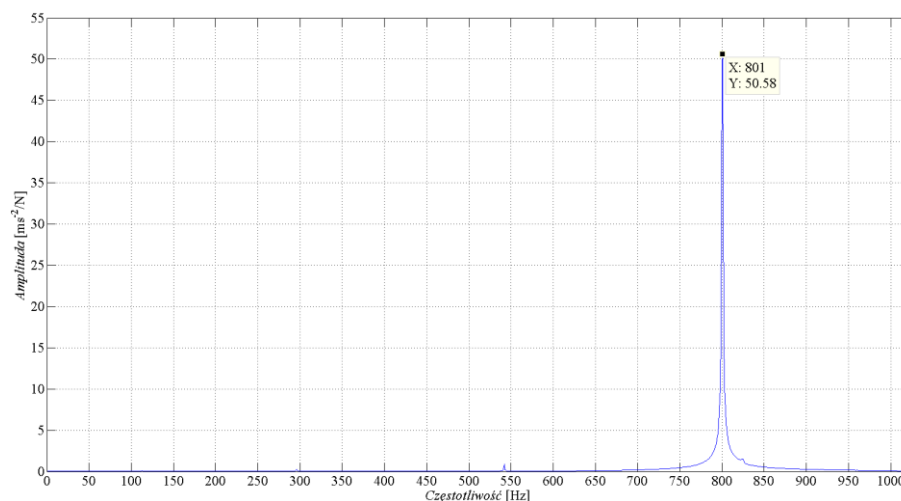
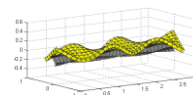
Rys. Z. 58 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla kształtownika stalowego, wymuszenie 2+Y, punkt 18, kierunek Y



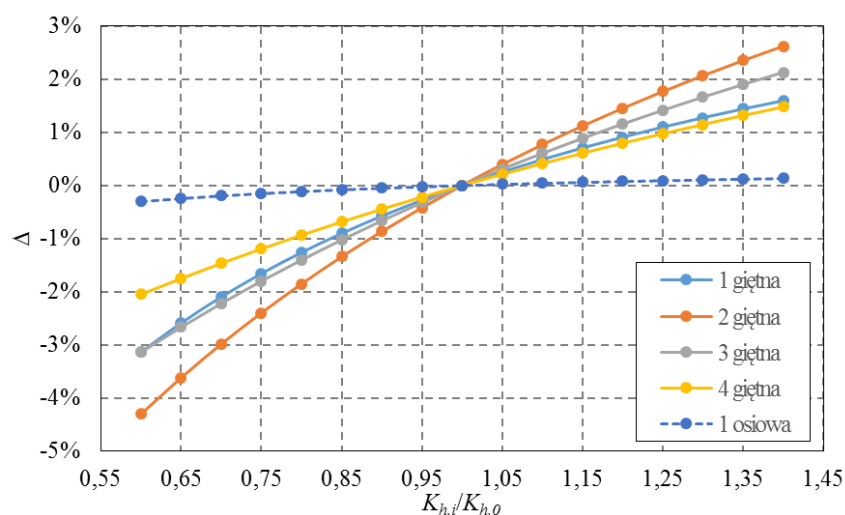
Rys. Z. 59 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla kształtownika stalowego, wymuszenie 1+X, punkt 1, kierunek X



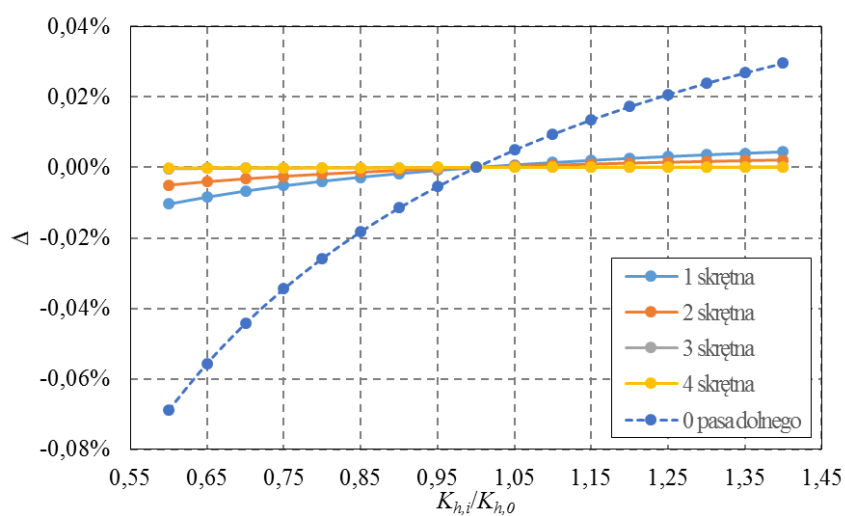
Rys. Z. 60 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla kształtownika stalowego, wymuszenie 1+X, punkt 2, kierunek X



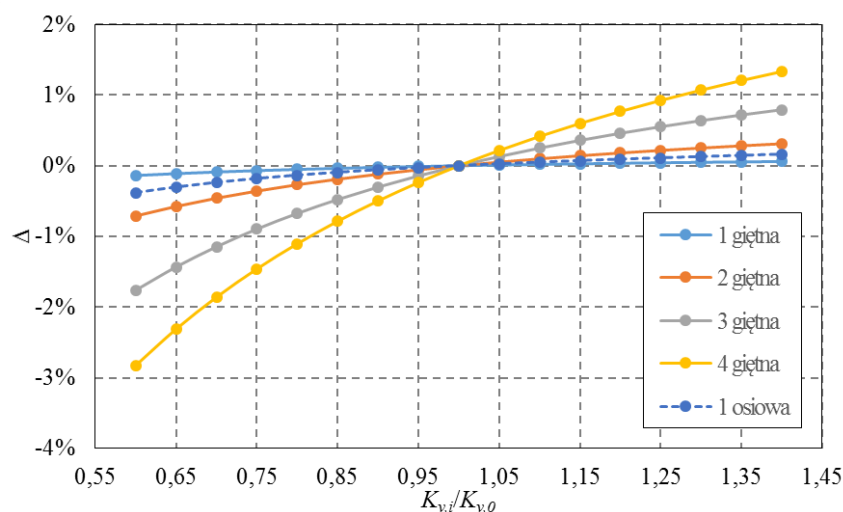
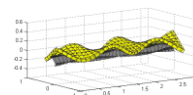
Rys. Z. 61 Przebieg amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia dla kształtownika stalowego, wymuszenie $1+X$, punkt 18, kierunek X



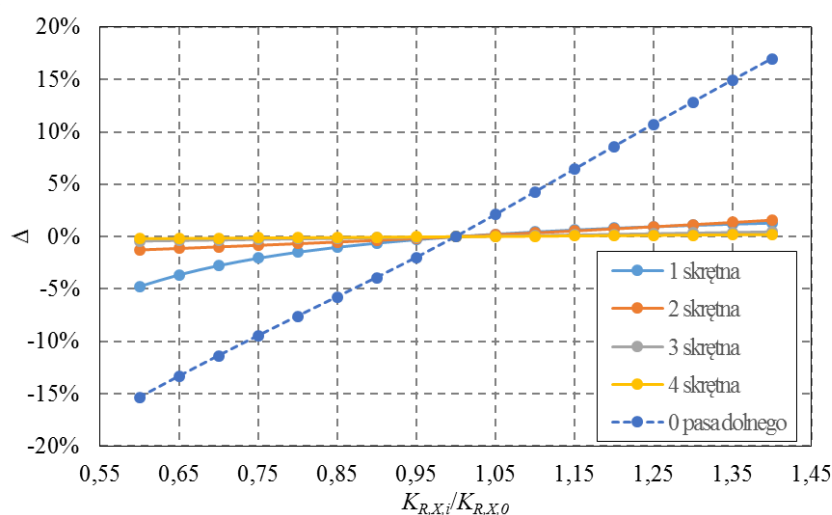
Rys. Z. 62 Zmiana częstotliwości drgań giętnych i częstotliwości osiowej w zależności od zmiany sztywności $K_{h,i}$, dla modelu belki zespolonej C2



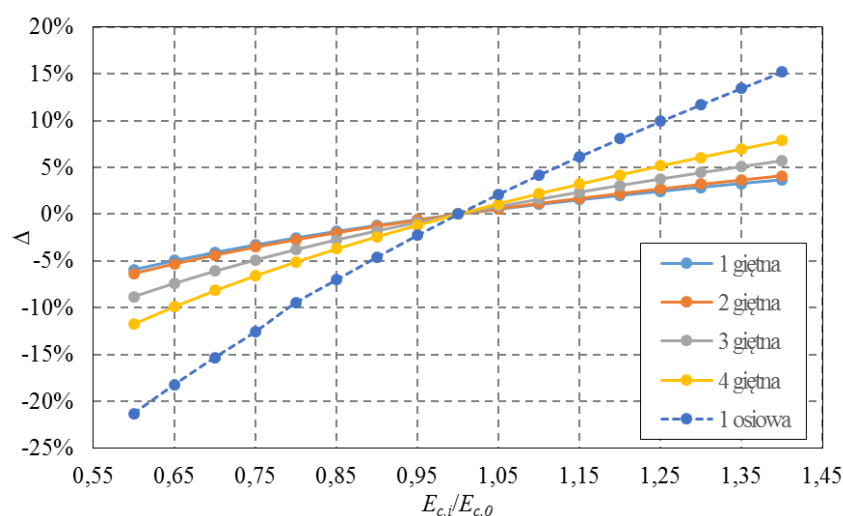
Rys. Z. 63 Zmiana częstotliwości drgań skrętnych i częstotliwości „zerowej” pasa dolnego w zależności od zmiany sztywności $K_{h,i}$, dla modelu belki zespolonej C2



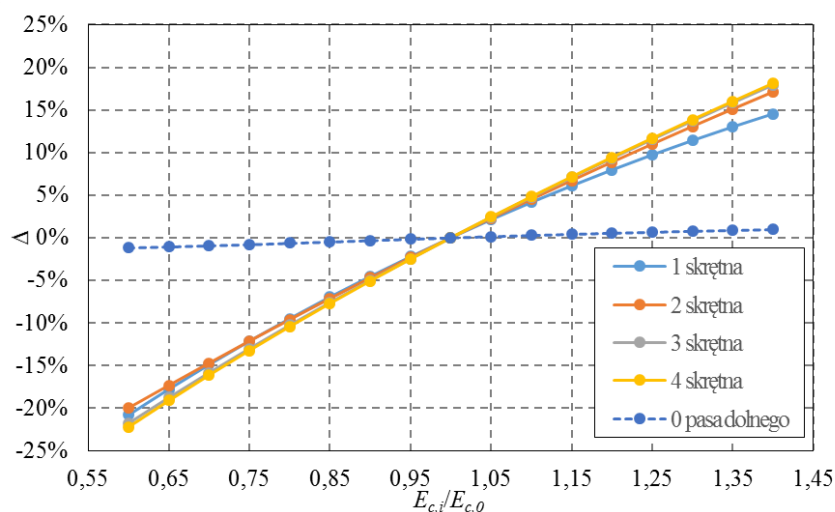
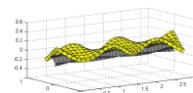
Rys. Z. 64 Zmiana częstotliwości drgań giętnych i częstotliwości osiowej w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki zespolonej C2



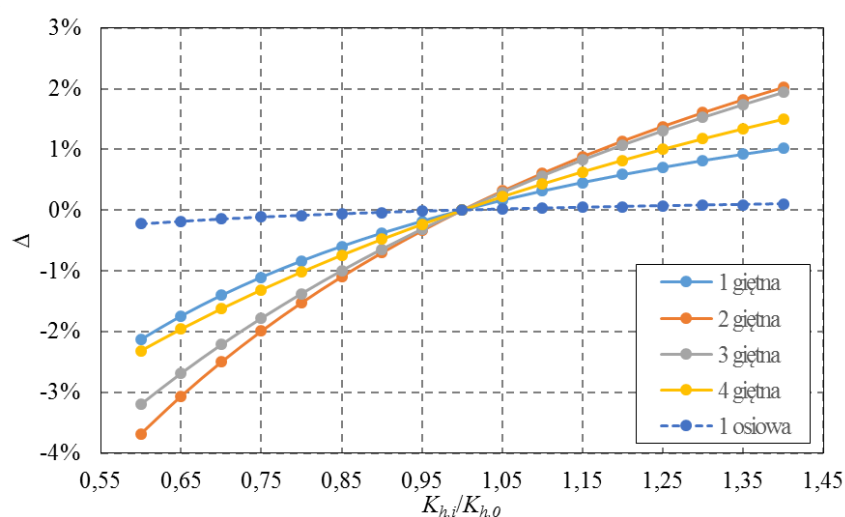
Rys. Z. 65 Zmiana częstotliwości drgań skrętnych i częstotliwości „zerowej” pasa dolnego w zależności od zmiany sztywności $K_{R,X}$, dla modelu belki zespolonej C2



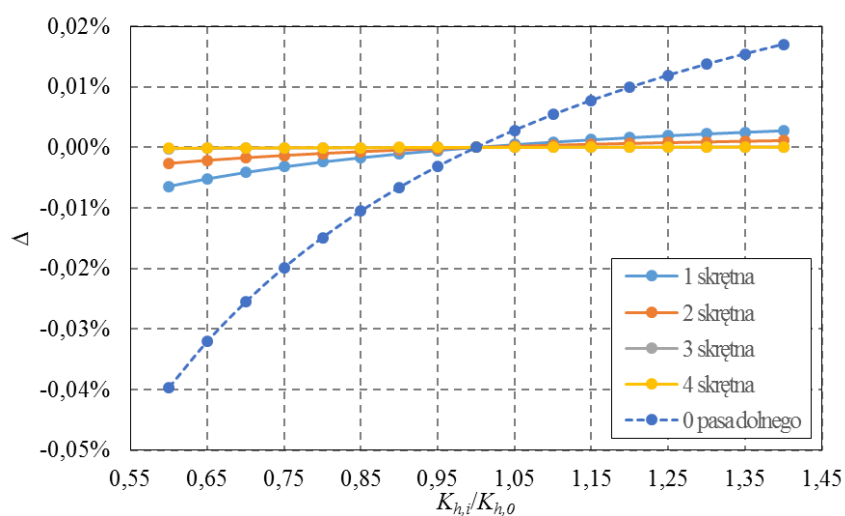
Rys. Z. 66 Zmiana częstotliwości drgań giętnych i częstotliwości osiowej w zależności od zmiany sztywności E_c , dla modelu belki zespolonej C2



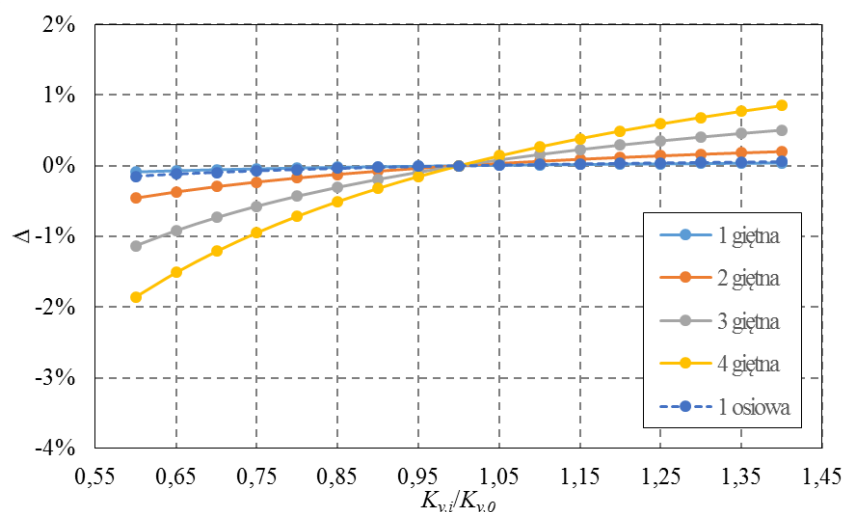
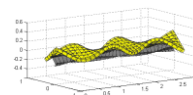
Rys. Z. 67 Zmiana częstotliwości drgań skrętnych i częstotliwości „zerowej” pasa dolnego w zależności od zmiany sztywności E_c , dla modelu belki zespolonej C2



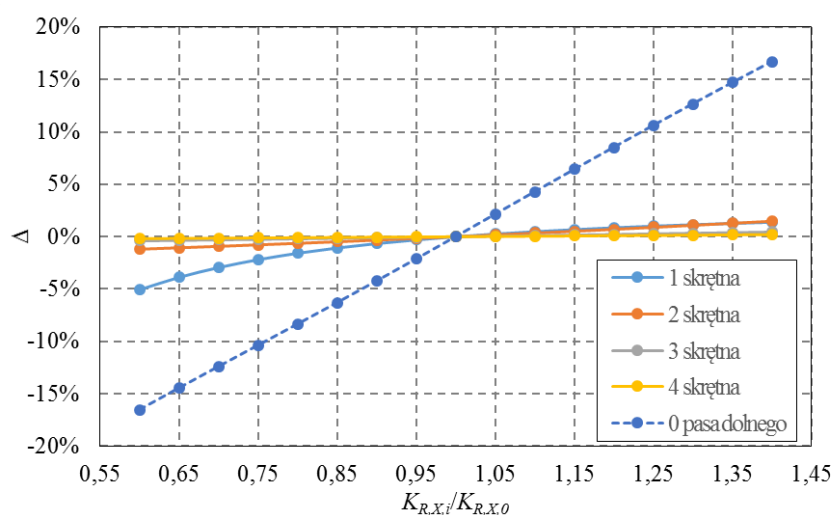
Rys. Z. 68 Zmiana częstotliwości drgań giętnych i częstotliwości osiowej w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki zespolonej C3



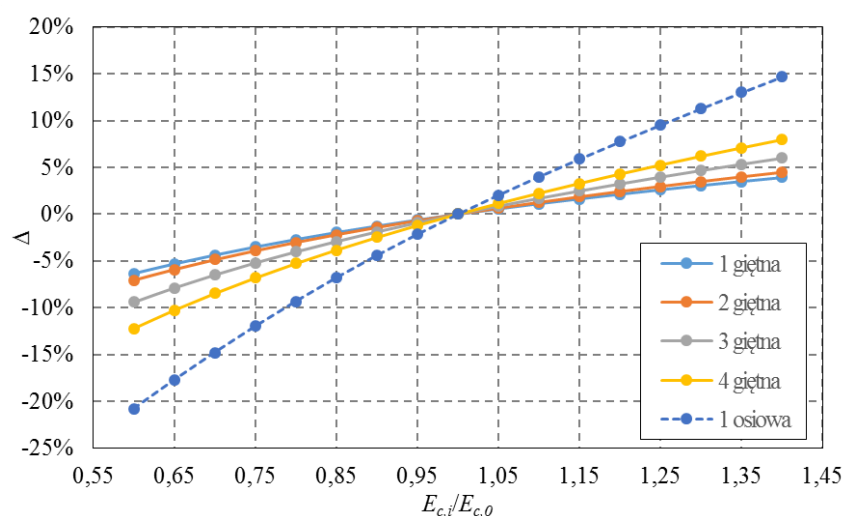
Rys. Z. 69 Zmiana częstotliwości drgań skrętnych i częstotliwości „zerowej” pasa dolnego w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki zespolonej C3



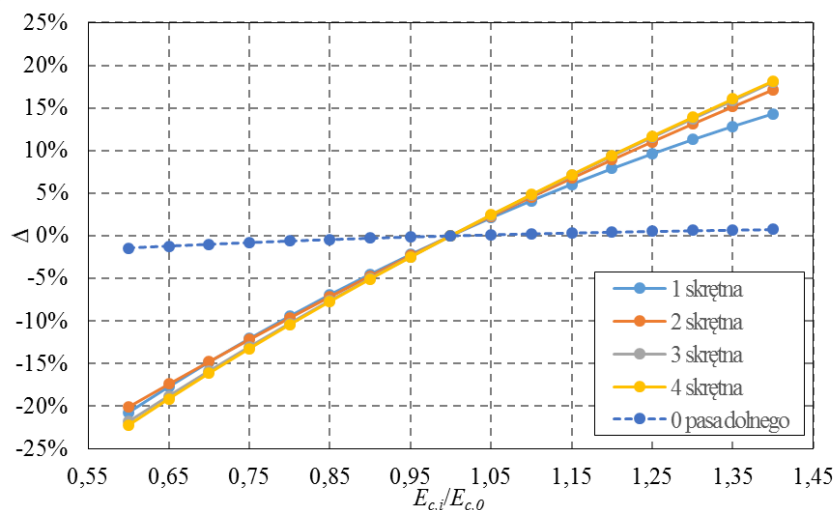
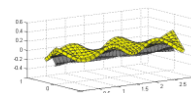
Rys. Z. 70 Zmiana częstotliwości drgań giętnych i częstotliwości osiowej w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki zespolonej C3



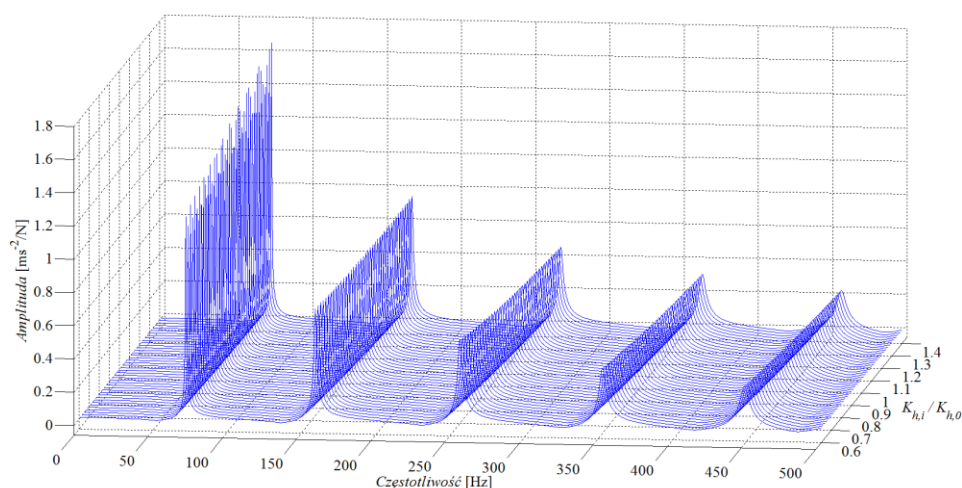
Rys. Z. 71 Zmiana częstotliwości drgań skrętnych i częstotliwości „zerowej” pasa dolnego w zależności od zmiany sztywności $K_{R,X}$, dla modelu belki zespolonej C3



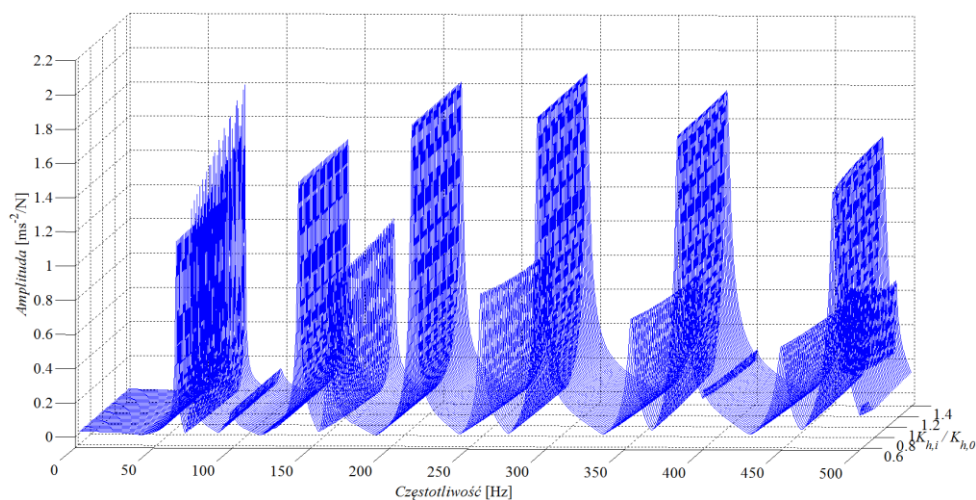
Rys. Z. 72 Zmiana częstotliwości drgań giętnych i częstotliwości osiowej w zależności od zmiany sztywności E_c , dla modelu belki zespolonej C3



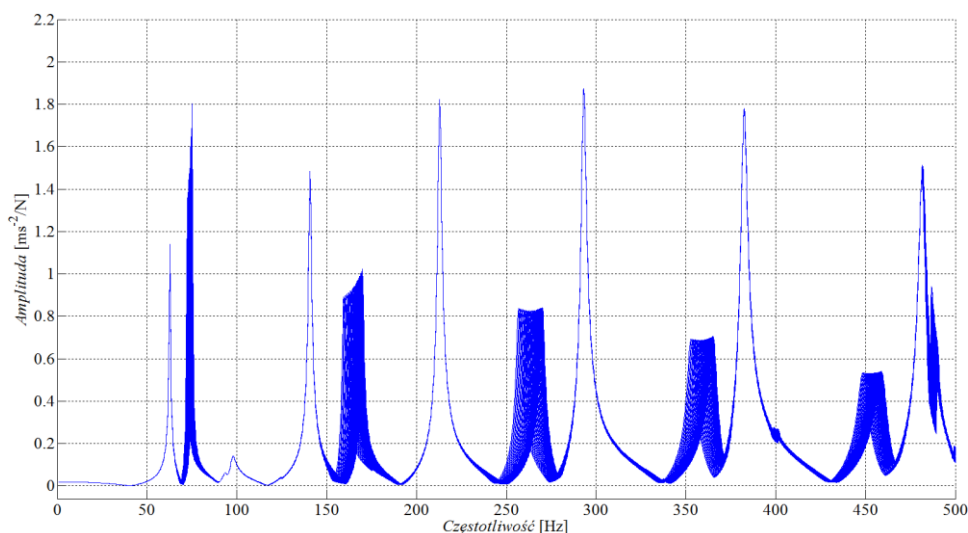
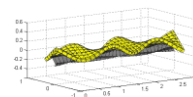
Rys. Z. 73 Zmiana częstotliwości drgań skrętnych i częstotliwości „zerowej” pasa dolnego w zależności od zmiany sztywności E_c , dla modelu belki zespolonej C3



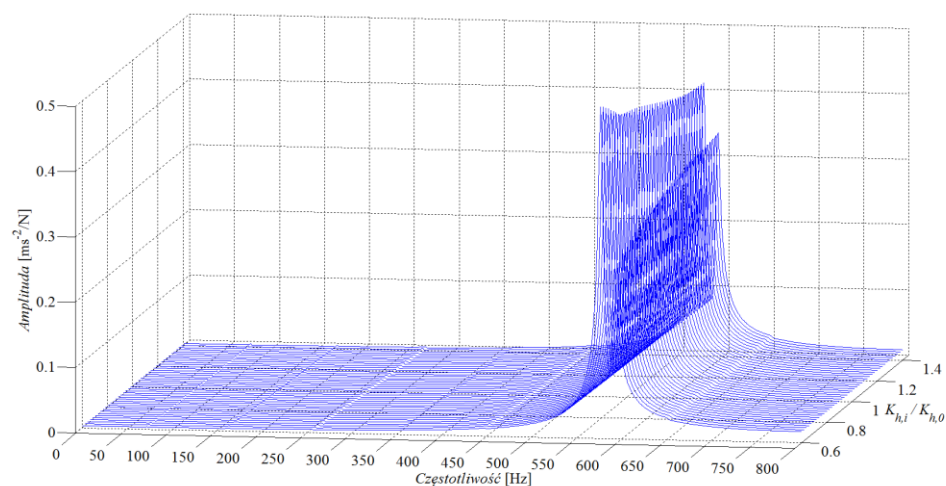
Rys. Z. 74 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki C1, wymuszenie 2-Z, punkt 2, kierunek Z



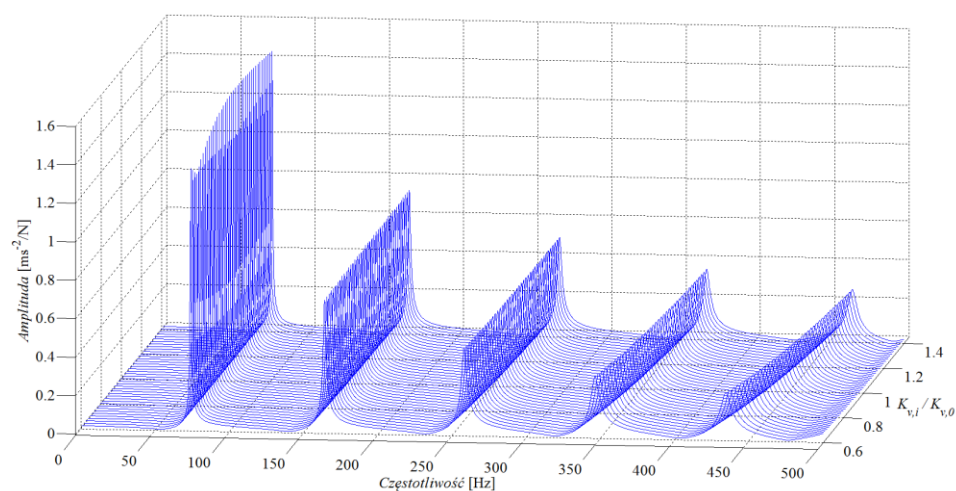
Rys. Z. 75 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki C1, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z



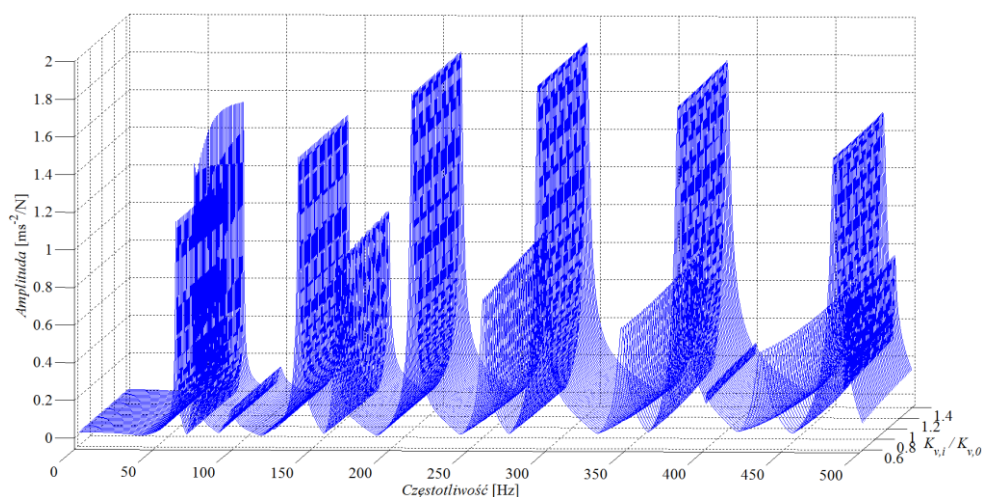
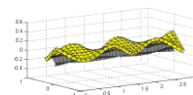
Rys. Z. 76 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki C1, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z – układ płaski



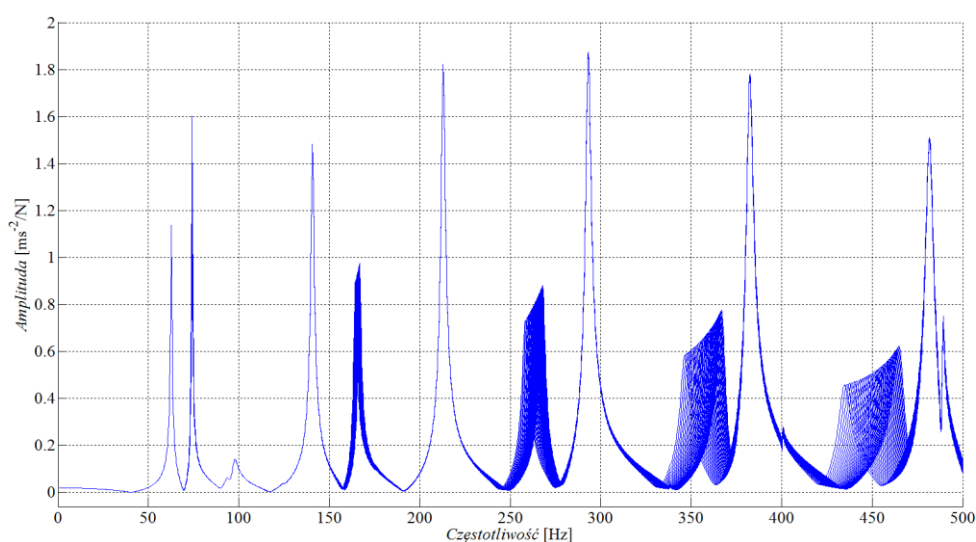
Rys. Z. 77 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki C1, wymuszenie 2+X, punkt 33, kierunek X



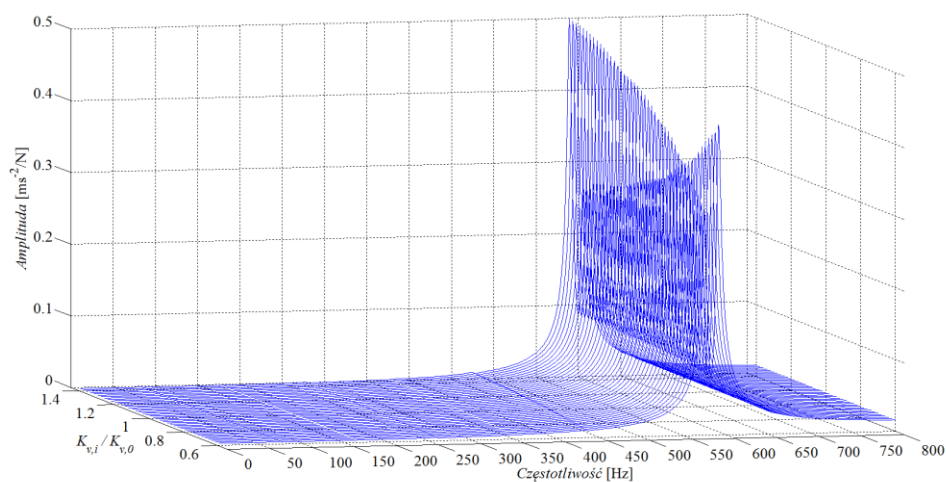
Rys. Z. 78 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki C1, wymuszenie 2-Z, punkt 2, kierunek Z



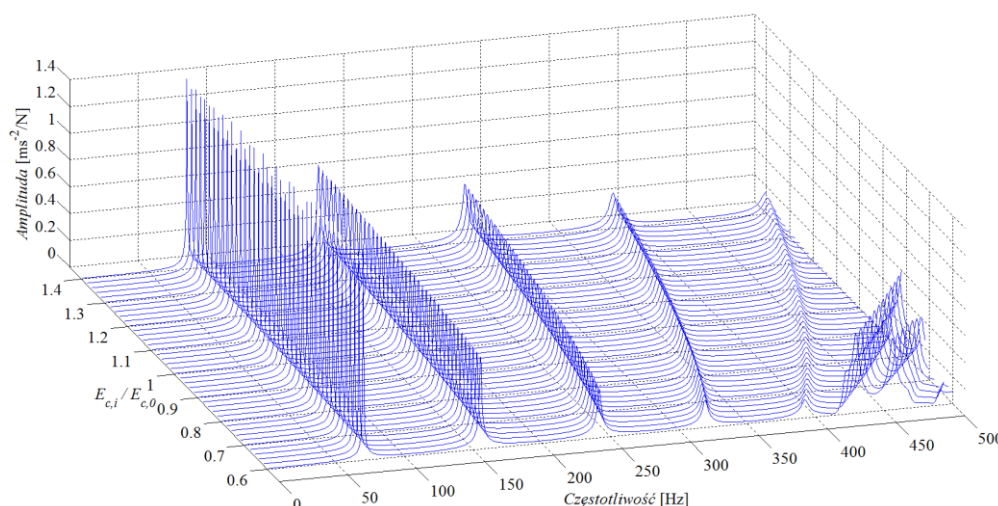
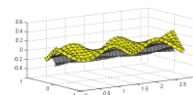
Rys. Z. 79 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki C1, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z



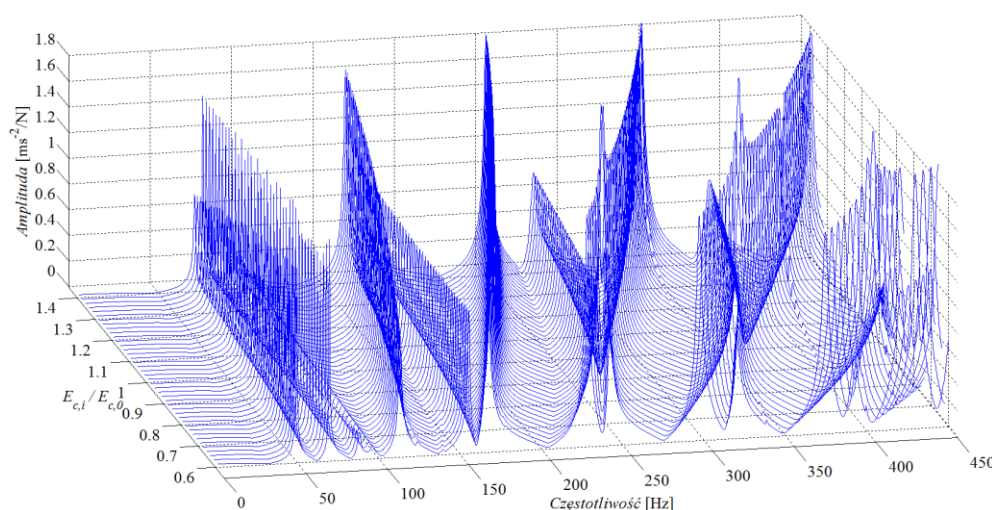
Rys. Z. 80 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki C1, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z – układ płaski



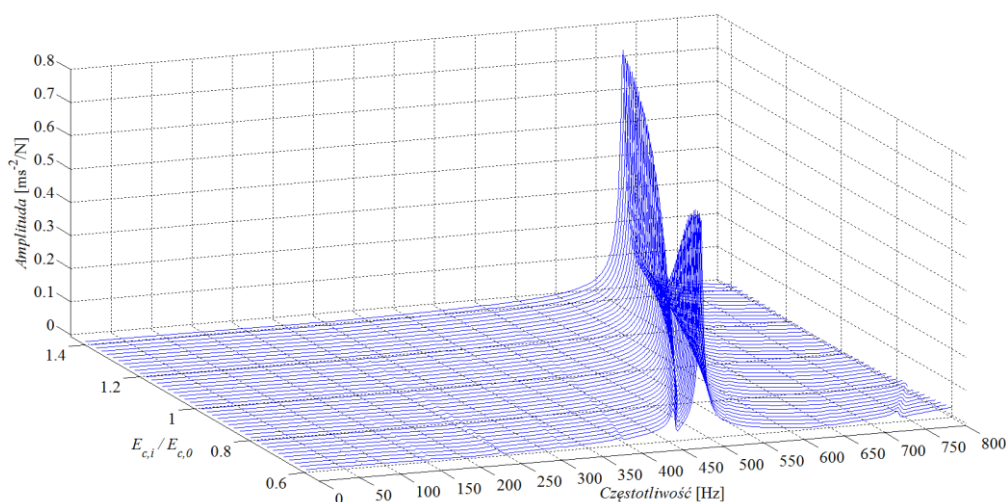
Rys. Z. 81 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki C1, wymuszenie 2+X, punkt 33, kierunek X



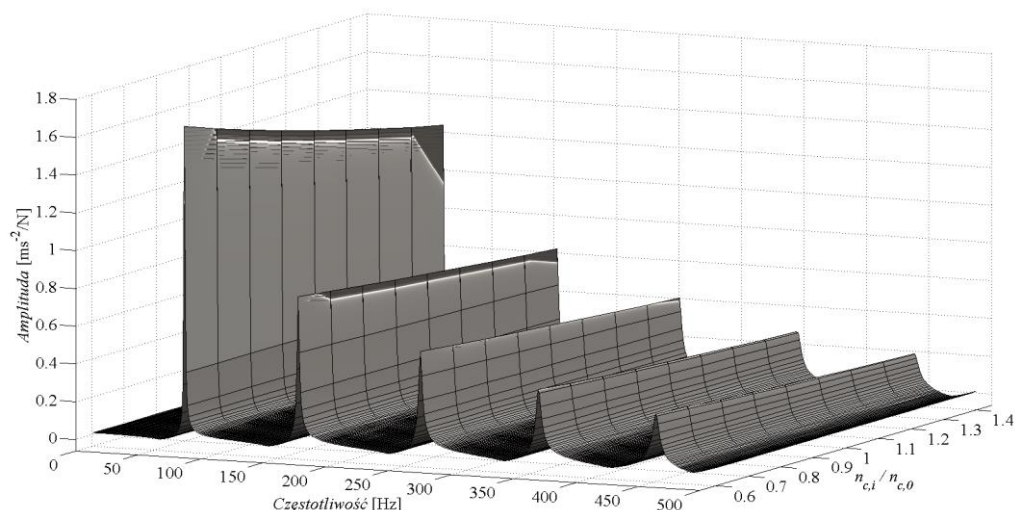
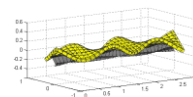
Rys. Z. 82 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany zastępczego modułu sprężystości podłużnej betonu E_c , dla modelu belki C1, wymuszenie 2-Z, punkt 36, kierunek Z



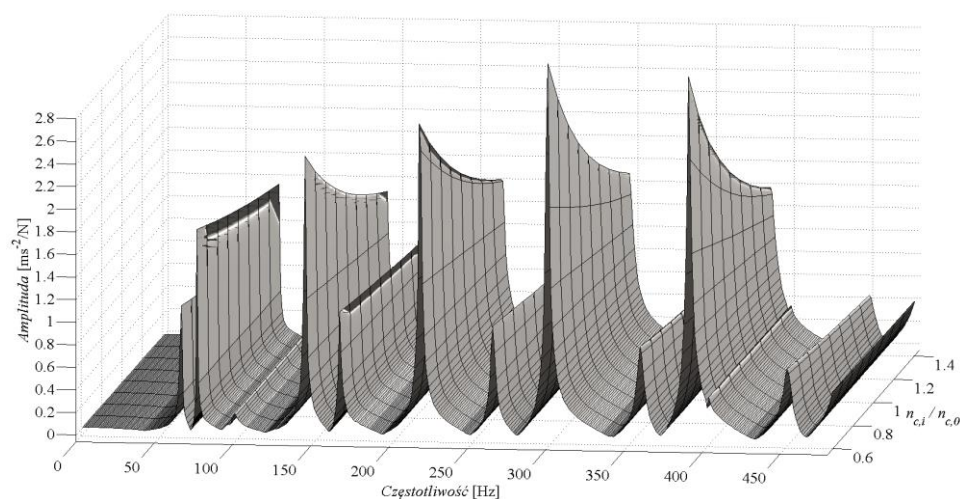
Rys. Z. 83 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany zastępczego modułu sprężystości podłużnej betonu E_c , dla modelu belki C1, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z



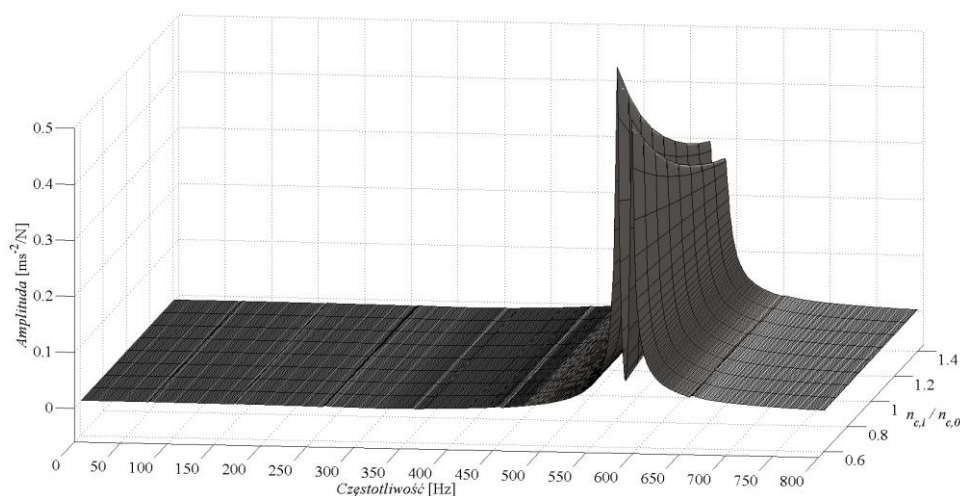
Rys. Z. 84 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany zastępczego modułu sprężystości podłużnej betonu E_c , dla modelu belki C1, wymuszenie 2+X, punkt 1, kierunek X



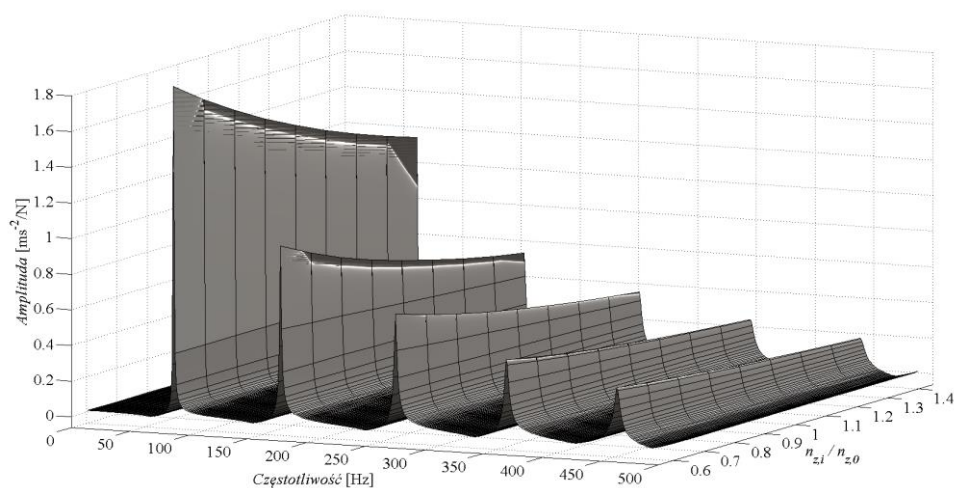
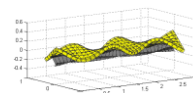
Rys. Z. 85 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat betonu η_c , dla modelu belki C1, wymuszenie 2- Z, punkt 2, kierunek Z



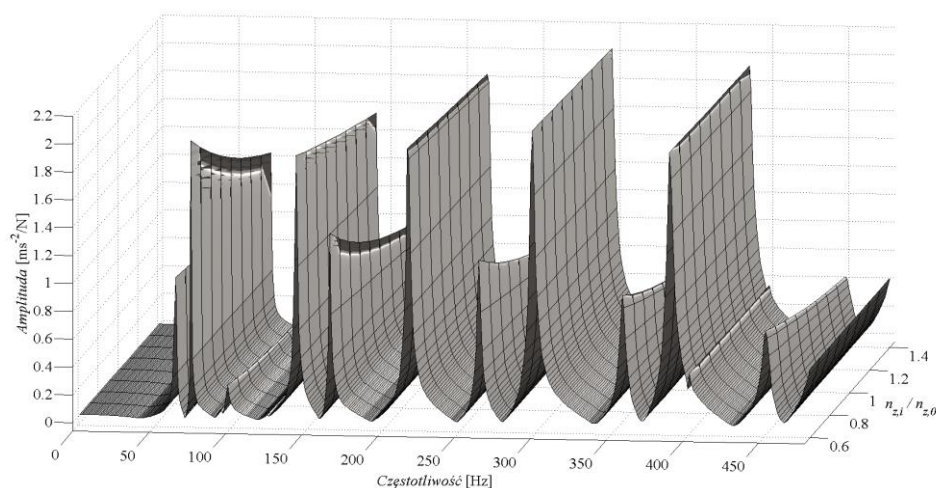
Rys. Z. 86 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat betonu η_c , dla modelu belki C1, wymuszenie 1- Z, punkt 1, kierunek Z



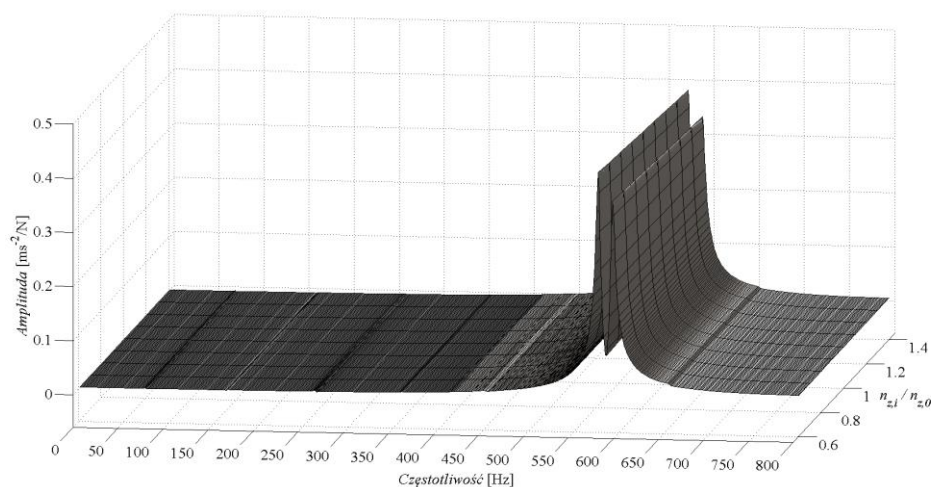
Rys. Z. 87 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat betonu η_c , dla modelu belki C1, wymuszenie 2+X, punkt 3, kierunek X



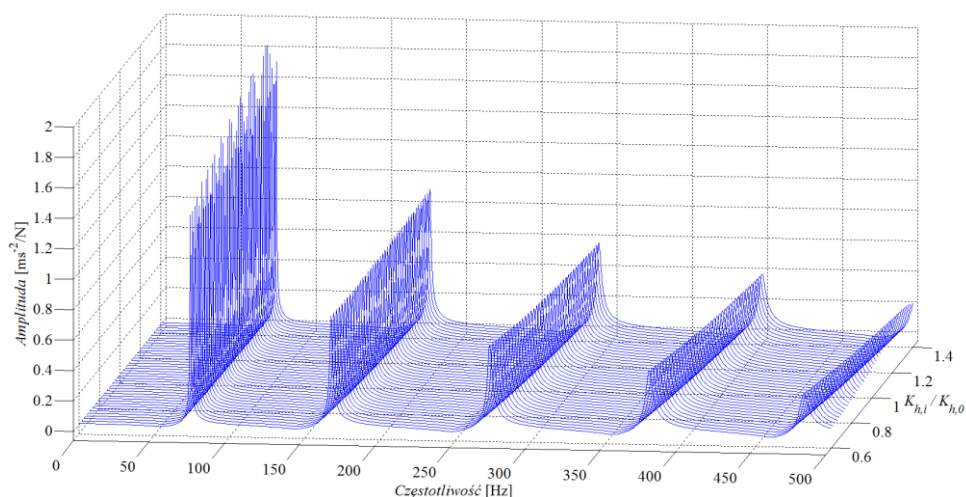
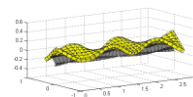
Rys. Z. 88 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat zespolenia η_z , dla modelu belki C1, wymuszenie 2-Z, punkt 2, kierunek Z



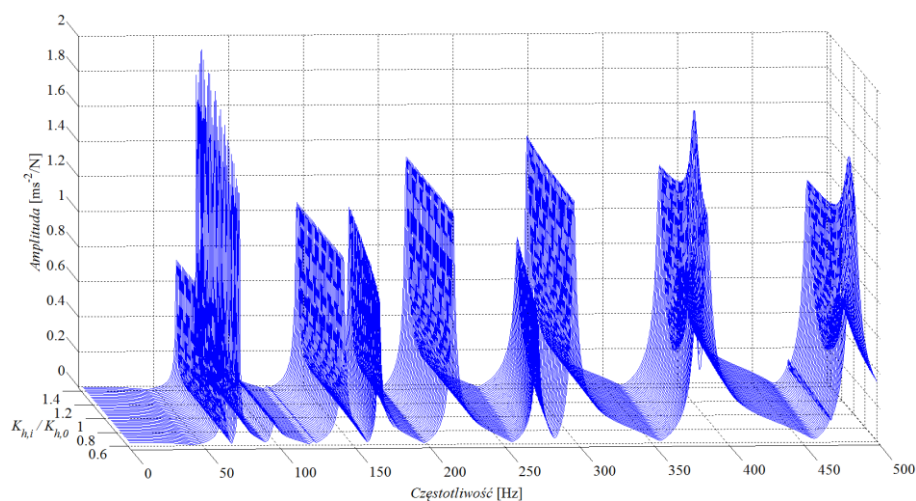
Rys. Z. 89 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat zespolenia η_z , dla modelu belki C1, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z



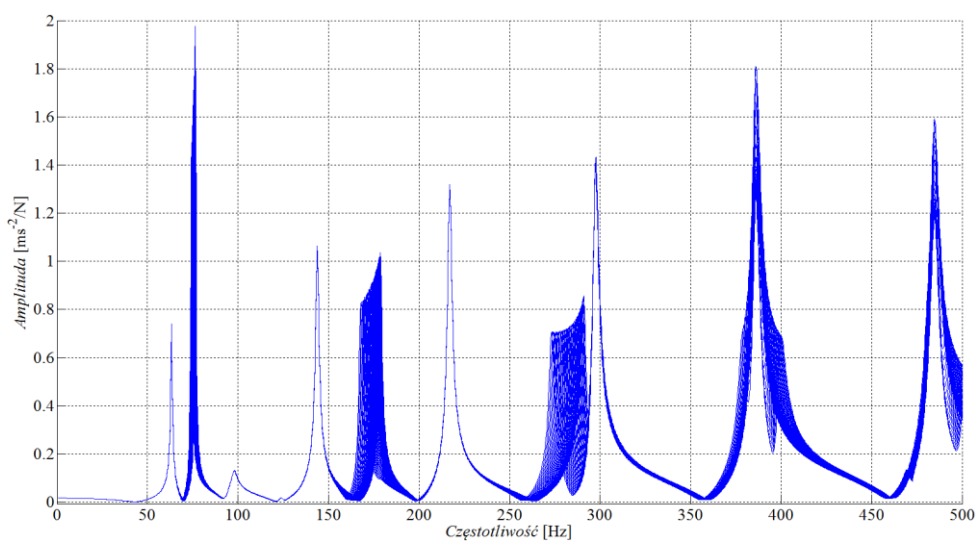
Rys. Z. 90 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat zespolenia η_z , dla modelu belki C1, wymuszenie 2+X, punkt 33, kierunek X



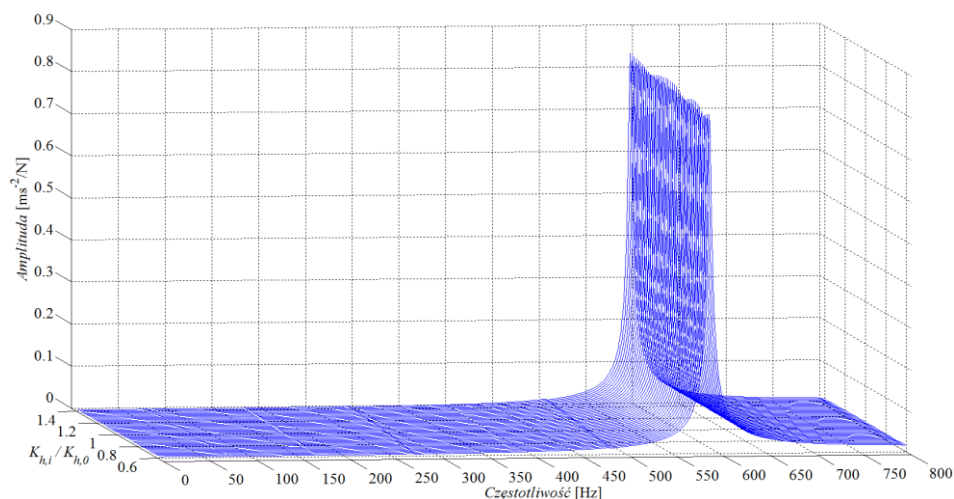
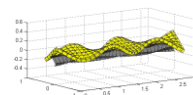
Rys. Z. 91 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki C3, wymuszenie 2-Z, punkt 2, kierunek Z



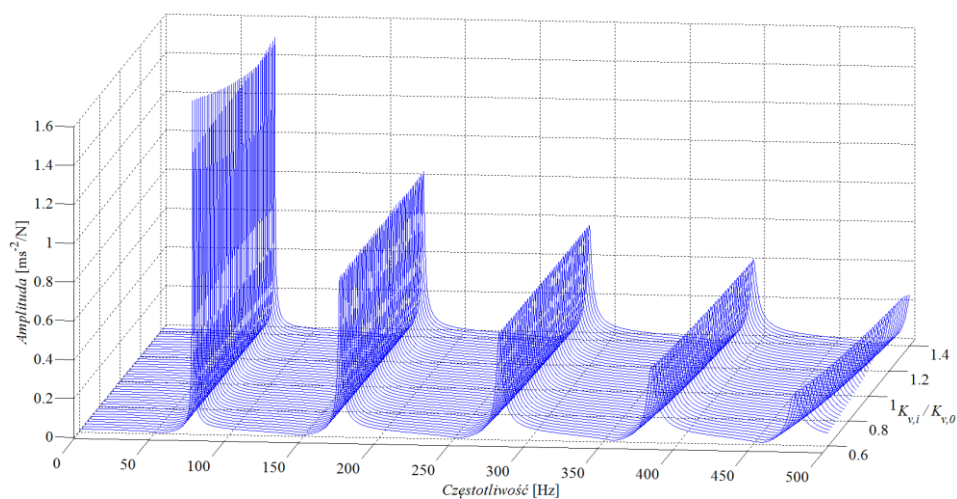
Rys. Z. 92 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki C3, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z



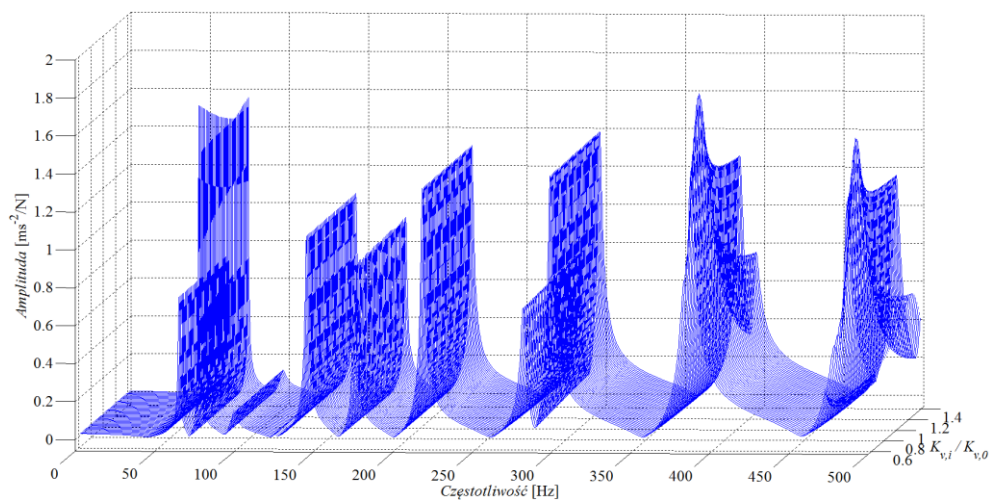
Rys. Z. 93 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki C3, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z – układ płaski



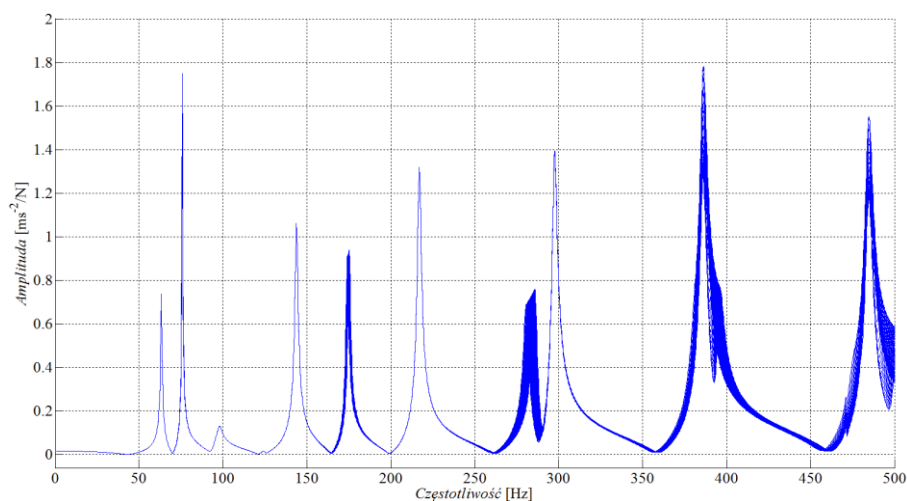
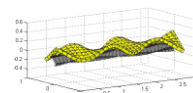
Rys. Z. 94 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_h , dla modelu belki C3, wymuszenie 2+X, punkt 33, kierunek X



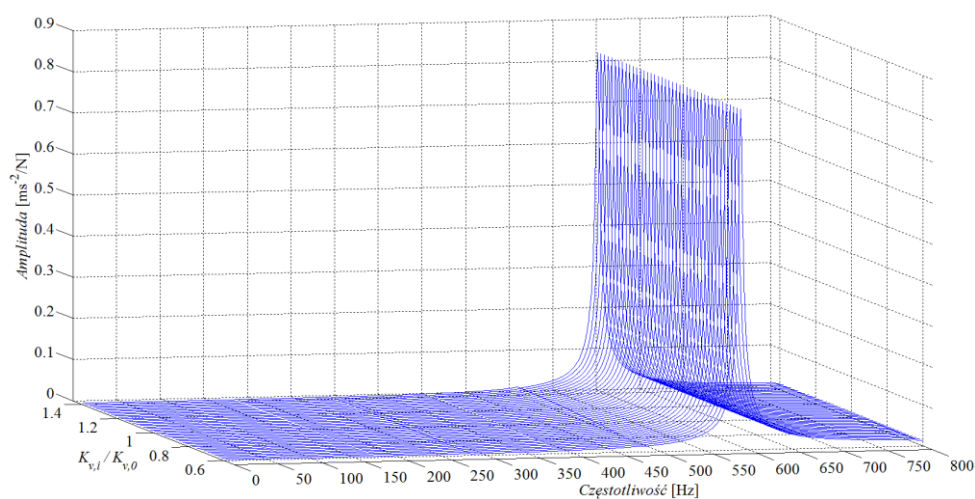
Rys. Z. 95 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki C3, wymuszenie 2-Z, punkt 2, kierunek Z



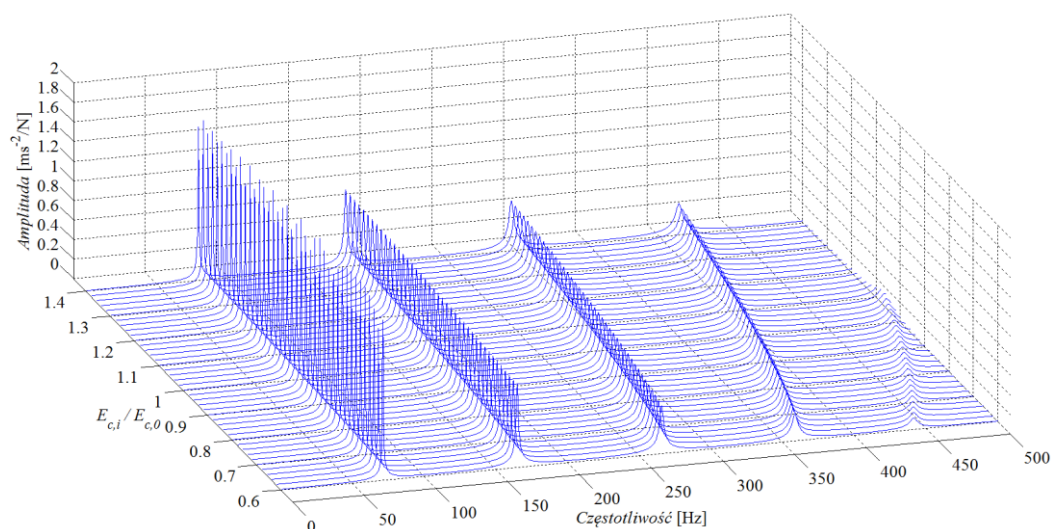
Rys. Z. 96 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki C3, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z



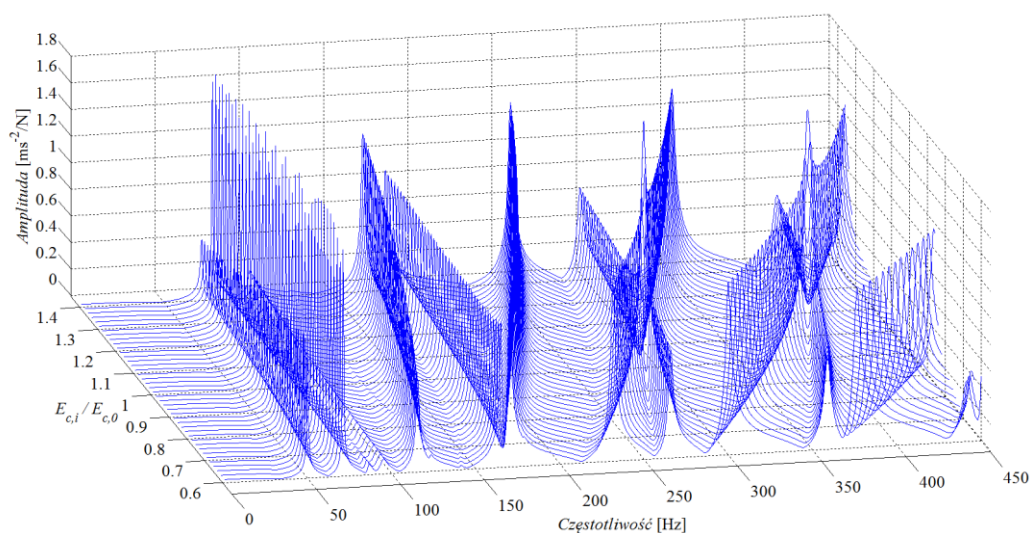
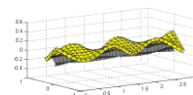
Rys. Z. 97 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki C3, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z – układ płaski



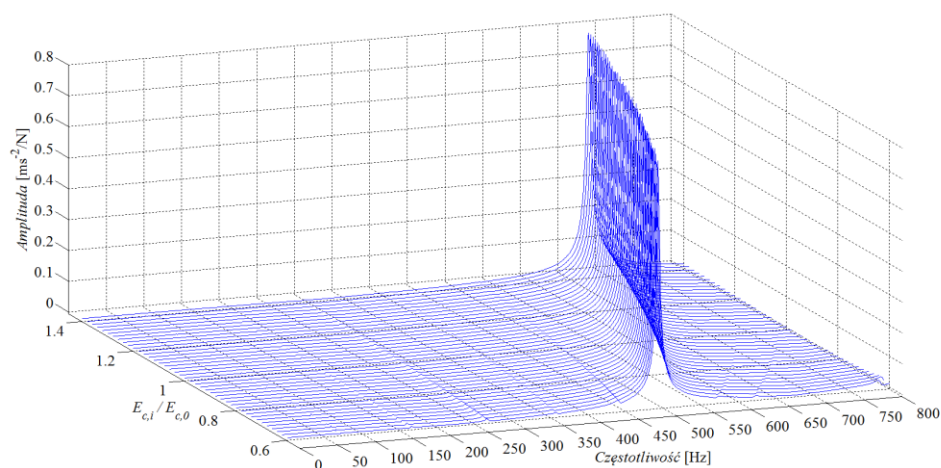
Rys. Z. 98 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany sztywności K_v , dla modelu belki C3, wymuszenie 2+X, punkt 33, kierunek X



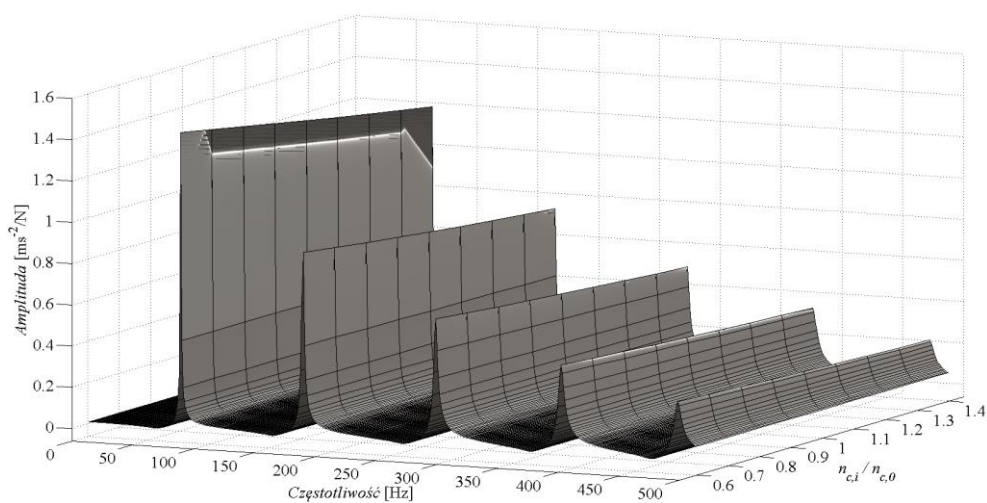
Rys. Z. 99 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany zastępczego modułu sprężystości podłużnej betonu E_c , dla modelu belki C3, wymuszenie 2-Z, punkt 36, kierunek Z



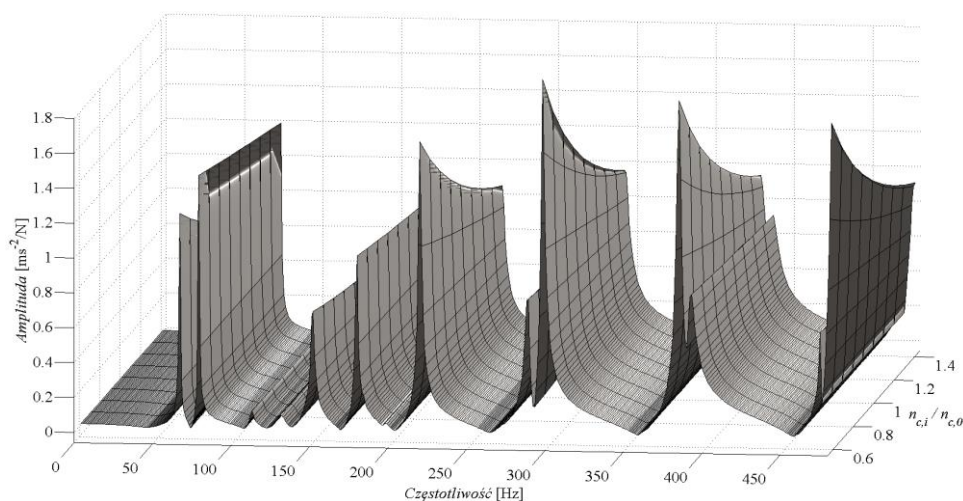
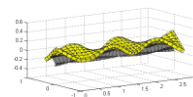
Rys. Z. 100 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany zastępczego modułu sprężystości podłużnej betonu E_c , dla modelu belki C3, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z



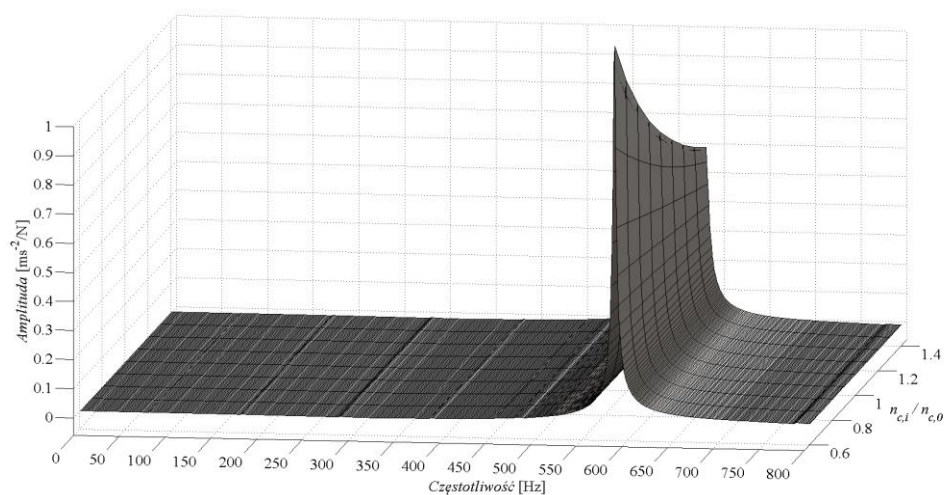
Rys. Z. 101 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany zastępczego modułu sprężystości podłużnej betonu E_c , dla modelu belki C3, wymuszenie 2+X, punkt 1, kierunek X



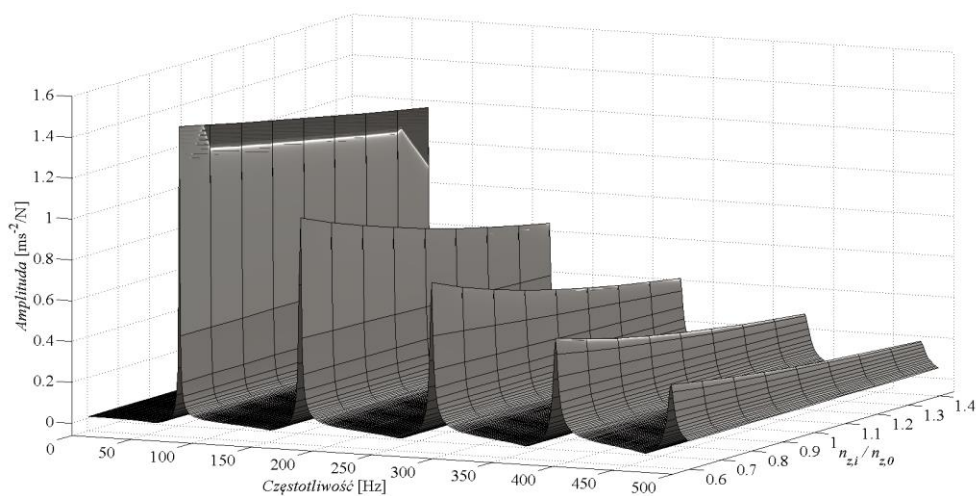
Rys. Z. 102 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat betonu η_c , dla modelu belki C3, wymuszenie 2-Z, punkt 2, kierunek Z



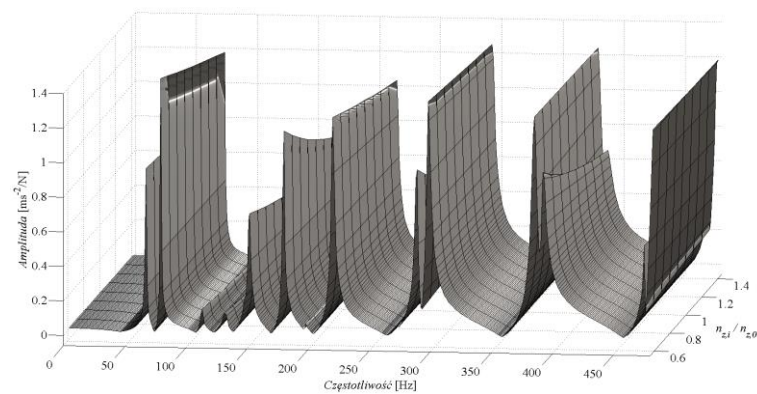
Rys. Z. 103 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat betonu η_c , dla modelu belki C3, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z



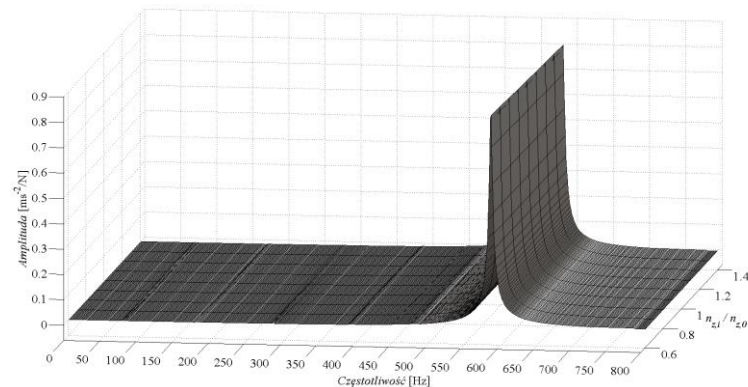
Rys. Z. 104 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat betonu η_c , dla modelu belki C3, wymuszenie 2+X, punkt 3, kierunek X



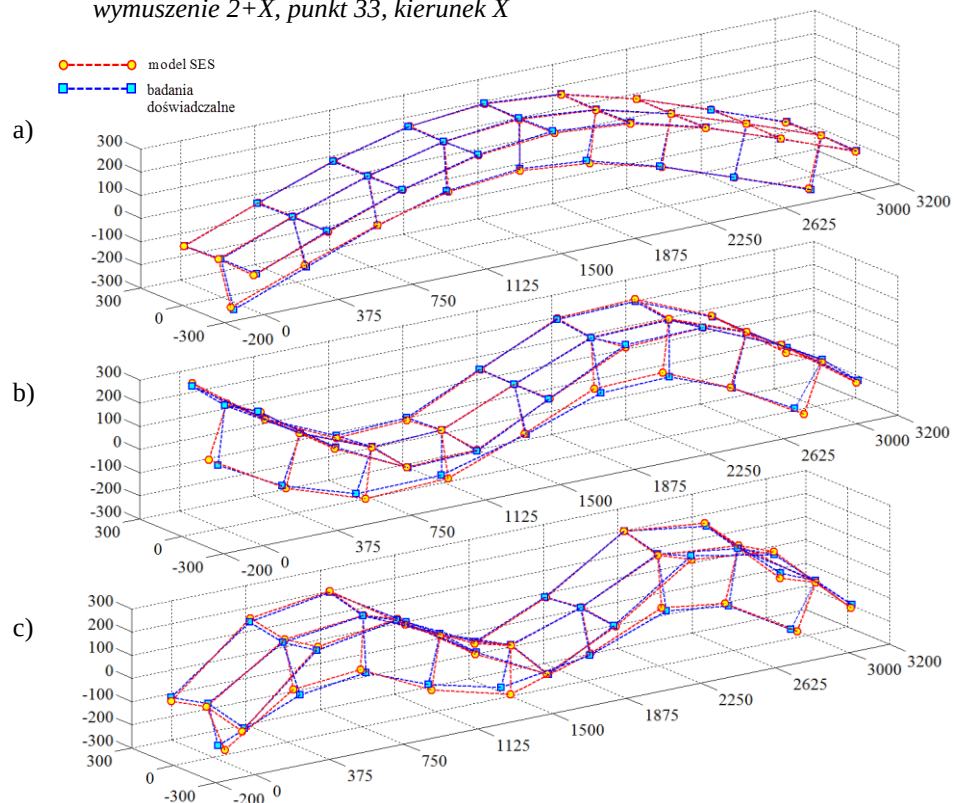
Rys. Z. 105 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat zespolenia η_z , dla modelu belki C3, wymuszenie 2-Z, punkt 2, kierunek Z



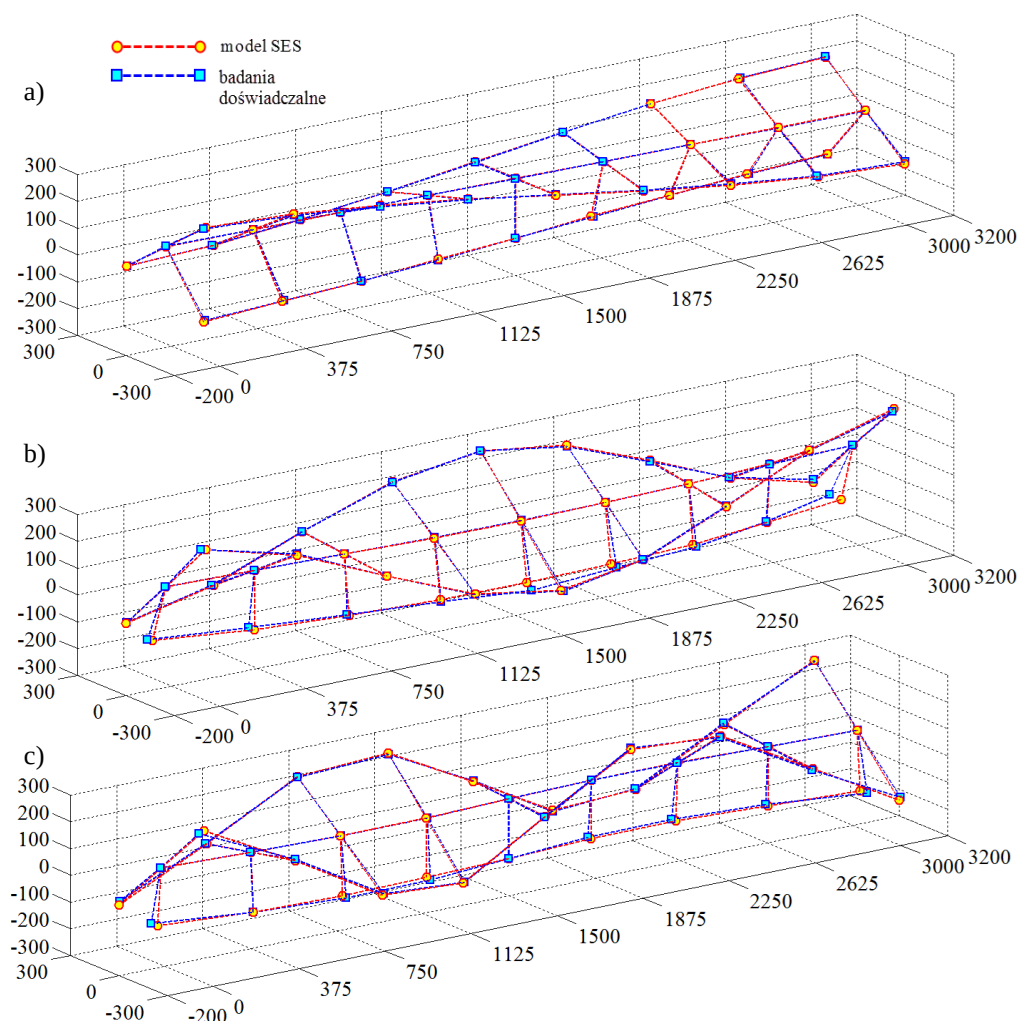
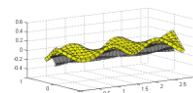
Rys. Z. 106 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat zespolenia η_z , dla modelu belki C3, wymuszenie 1-Z, punkt 1, kierunek Z



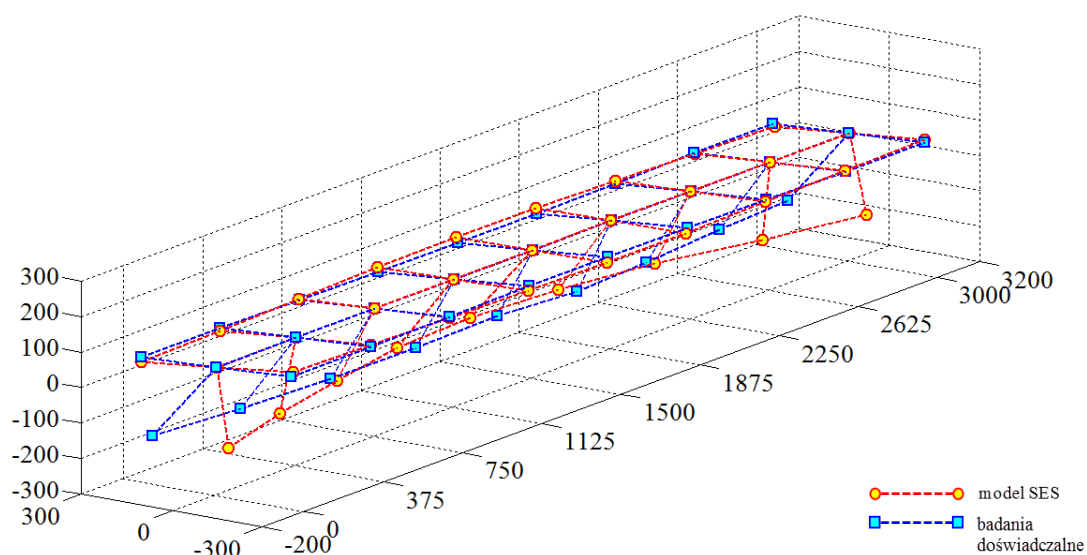
Rys. Z. 107 Zmiana przebiegów amplitud częstotliwościowych funkcji przejścia przyspieszeń w zależności od zmiany współczynnika strat zespolenia η_z , dla modelu belki C3, wymuszenie 2+X, punkt 33, kierunek X



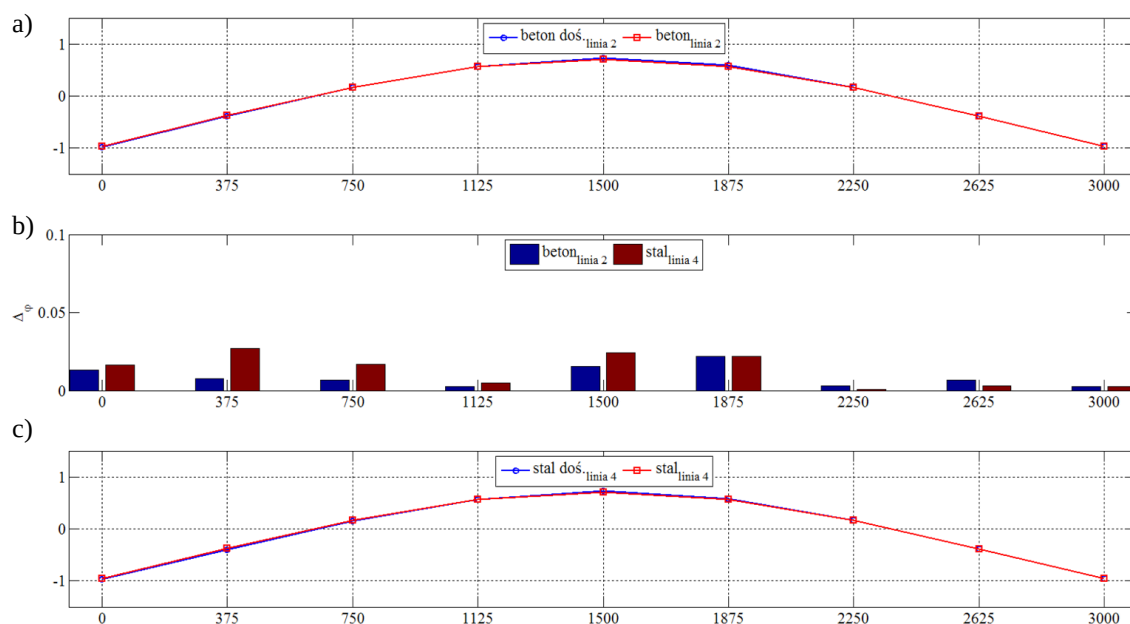
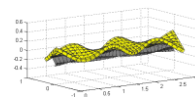
Rys. Z. 108 Porównanie doświadczalnych i obliczeniowych formy drgań giętych – belka C2: a) 1_g ; b) 2_g ; c) 3_g



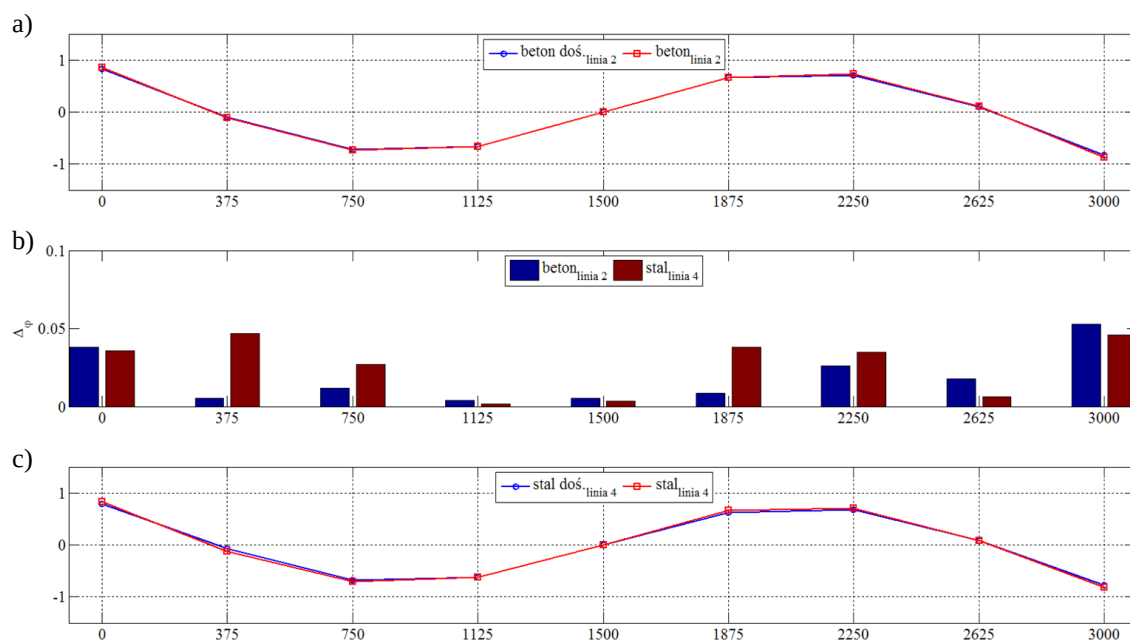
Rys. Z. 109 Porównanie doświadczalnych i obliczeniowych formy drgań skrętnych – belka C2:
a) 1_s ; b) 2_s ; c) 3_s



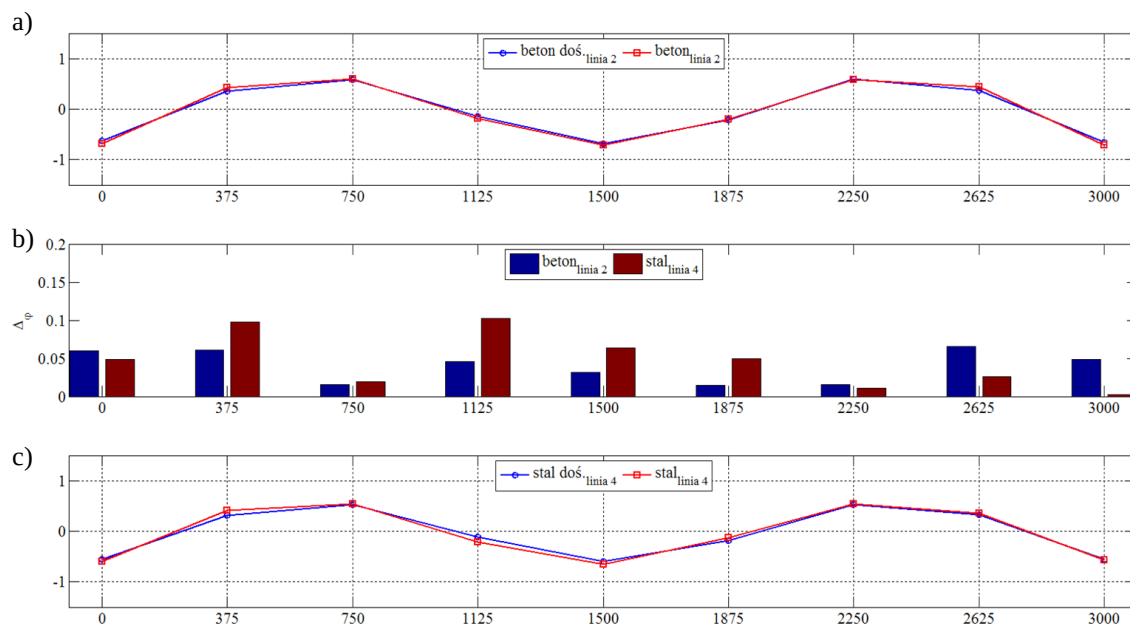
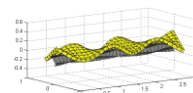
Rys. Z. 110 Porównanie doświadczalnych i obliczeniowych „zerowej” formy drgań pasa
dolnego – belka C2



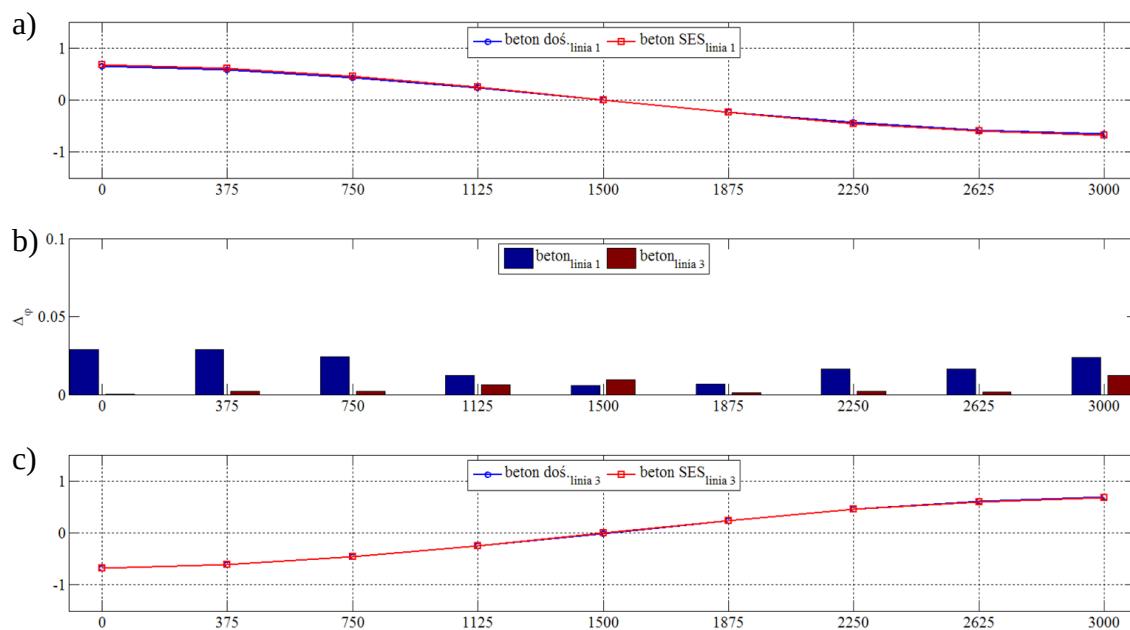
Rys. Z. 111 Porównanie pierwszej formy drgań giętej doświadczalnej i obliczeniowej – belka C2: a) 2 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci $\Delta\phi$; c) 4 linia punktów pomiarowych leżących na kształtowniku stalowym



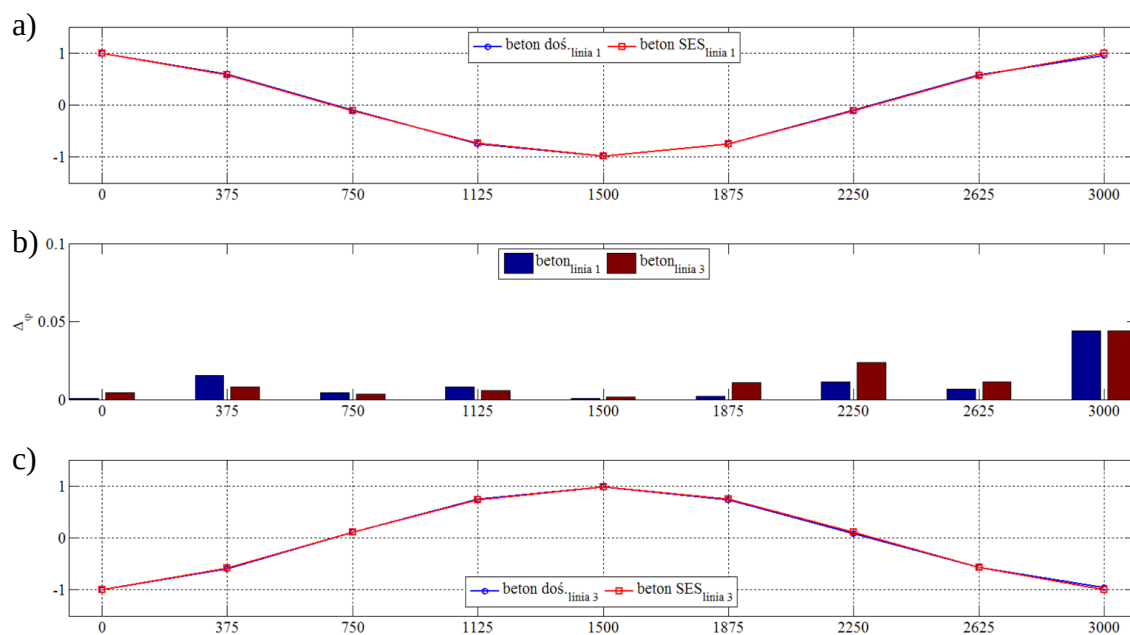
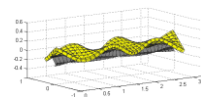
Rys. Z. 112 Porównanie drugiej formy drgań giętej doświadczalnej i obliczeniowej – belka C2: a) 2 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci $\Delta\phi$; c) 4 linia punktów pomiarowych leżących na kształtowniku stalowym



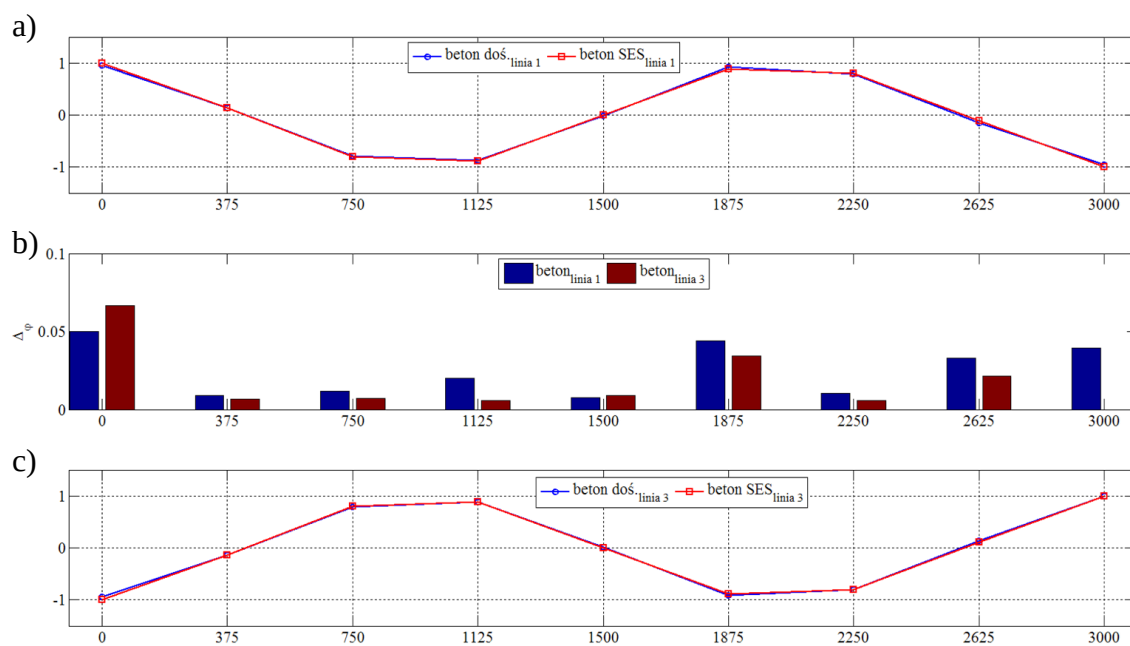
Rys. Z. 113 Porównanie trzeciej formy drgań giętej doświadczalnej i obliczeniowej – belka C2: a) 2 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci Δ_{ϕ} ; c) 4 linia punktów pomiarowych leżących na kształtowniku stalowym



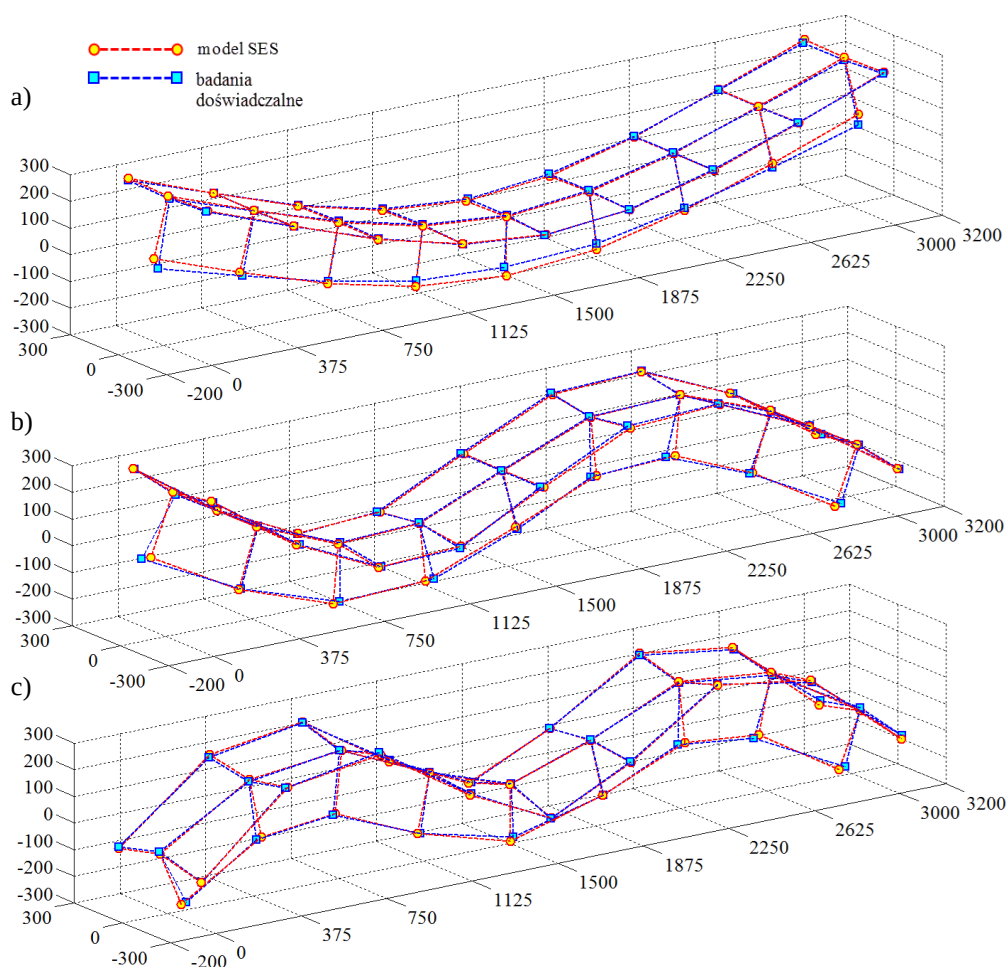
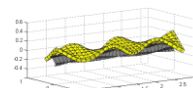
Rys. Z. 114 Porównanie pierwszej formy drgań skrętnej doświadczalnej i obliczeniowej – belka C2: a) 1 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci Δ_{ϕ} ; c) 3 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej



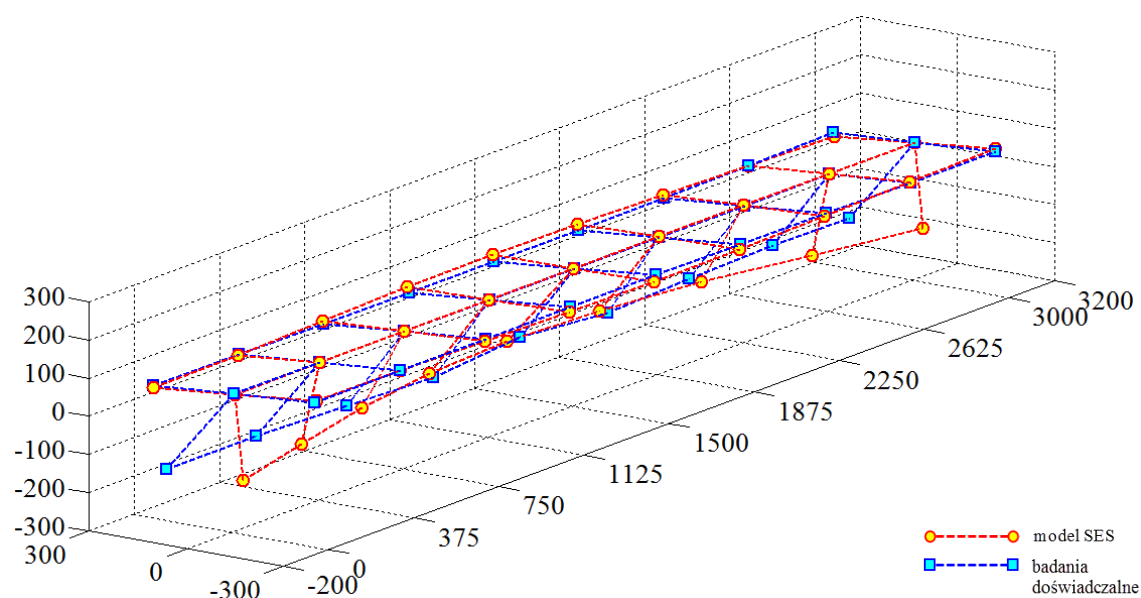
Rys. Z. 115 Porównanie drugiej formy drgań skrętnej doświadczalnej i obliczeniowej – belka C2: a) 1 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci $\Delta\phi$; c) 3 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej



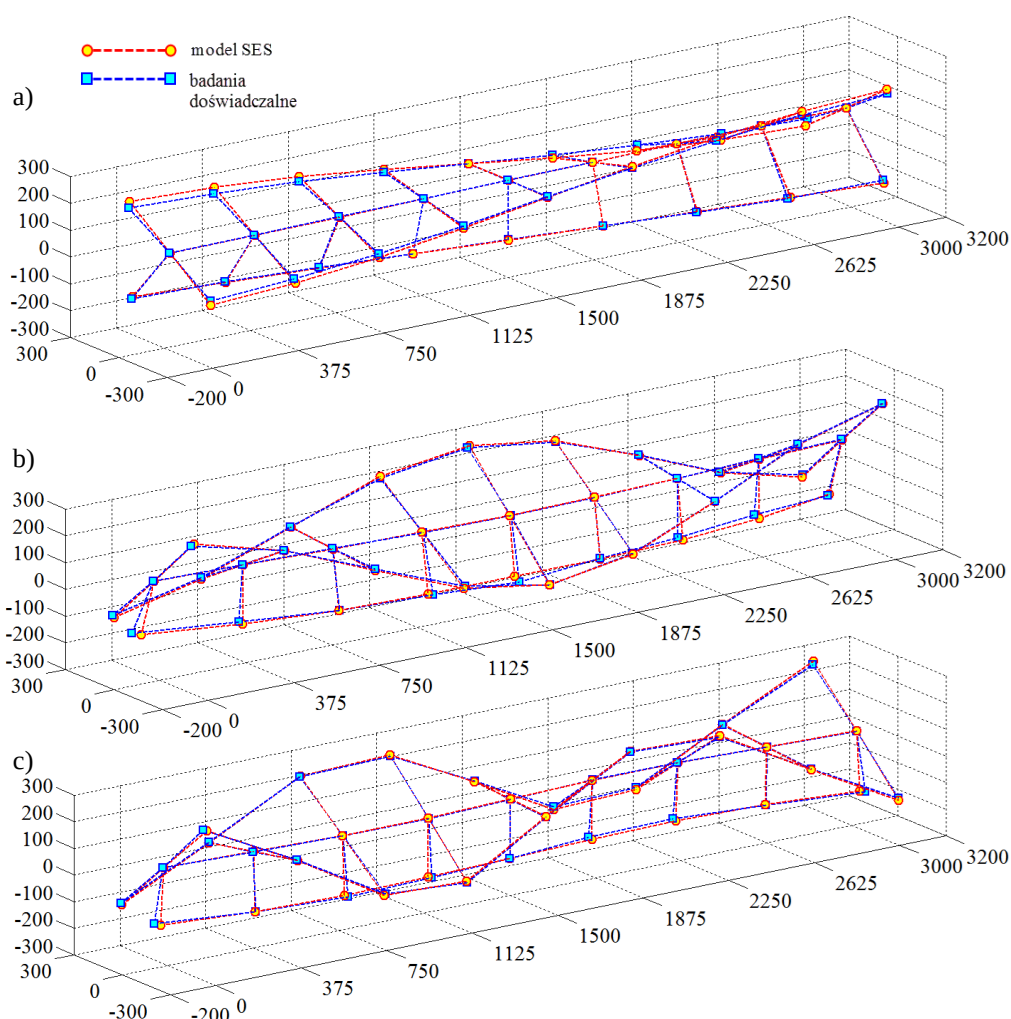
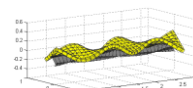
Rys. Z. 116 Porównanie trzeciej formy drgań skrętnej doświadczalnej i obliczeniowej – belka C2: a) 1 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci $\Delta\phi$; c) 3 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej



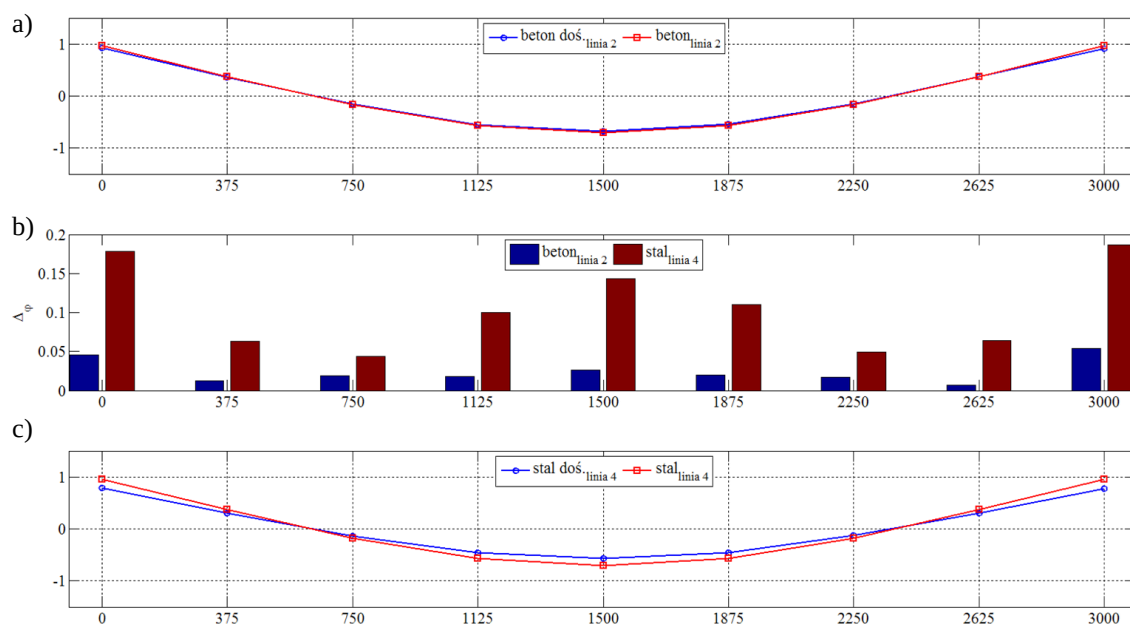
Rys. Z. 117 Porównanie doświadczalnych i obliczeniowych formy drgań giętych – belka C3:
a) 1_g ; b) 2_g ; c) 3_g



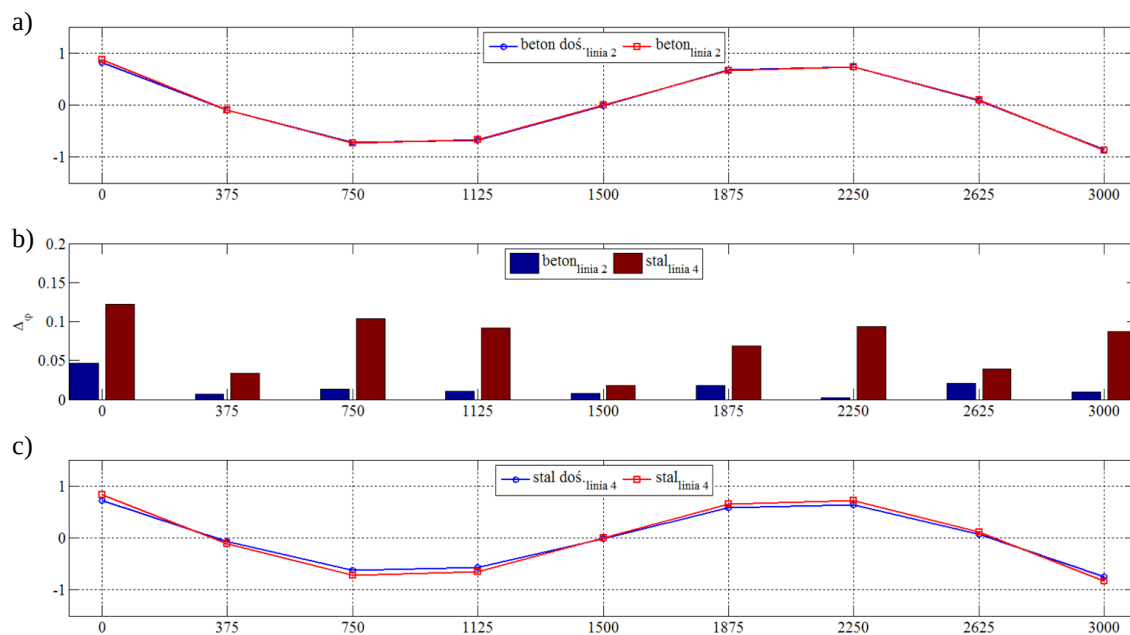
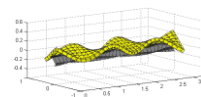
Rys. Z. 118 Porównanie doświadczalnych i obliczeniowych „zerowej” formy drgań pasa dolnego – belka C3



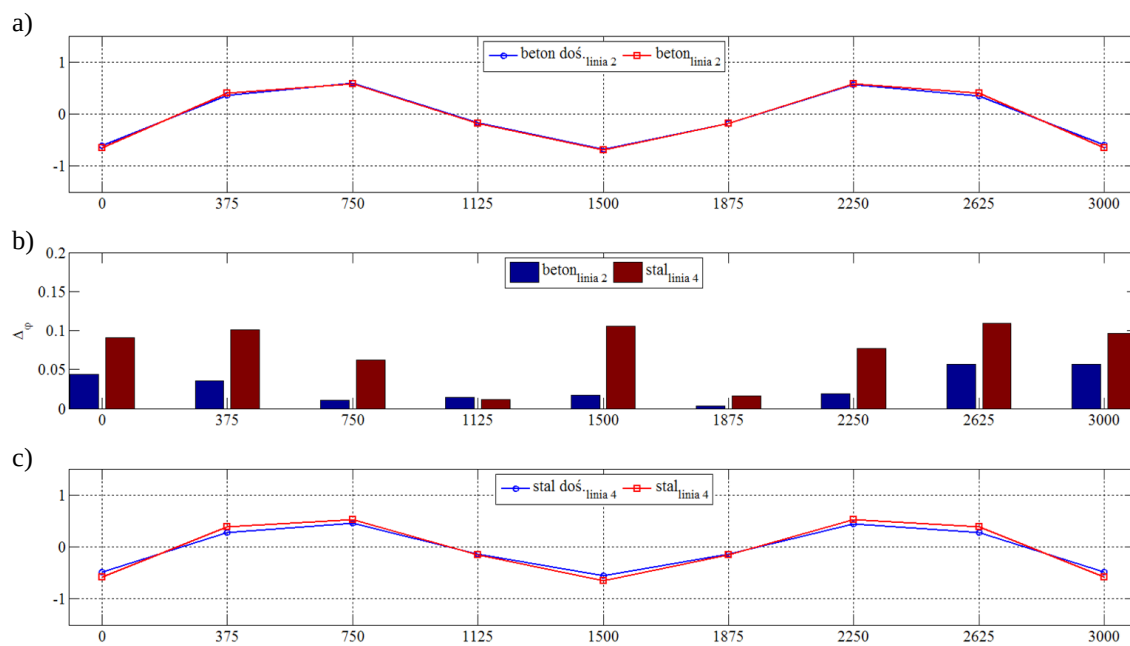
Rys. Z. 119 Porównanie doświadczalnych i obliczeniowych formy drgań skrętnych – belka C3:
a) 1_s ; b) 2_s ; c) 3_s



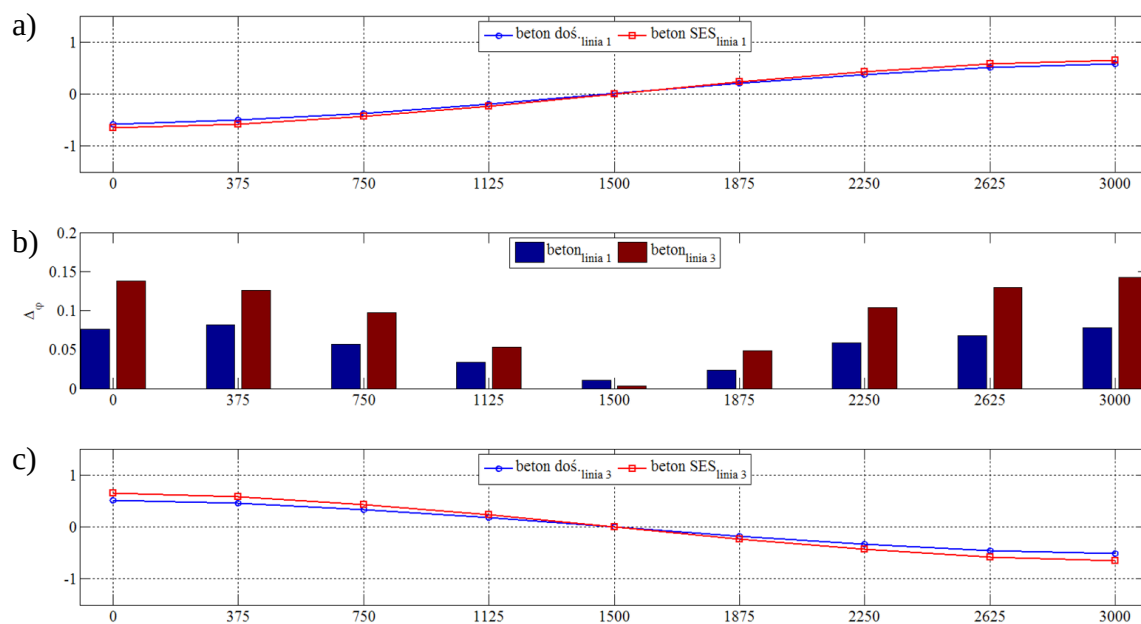
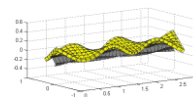
Rys. Z. 120 Porównanie pierwszej formy drgań giętnych doświadczalnej i obliczeniowej – belka C3:
a) 2 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci $\Delta\varphi$; c) 4 linia punktów pomiarowych leżących na kształtowniku stalowym



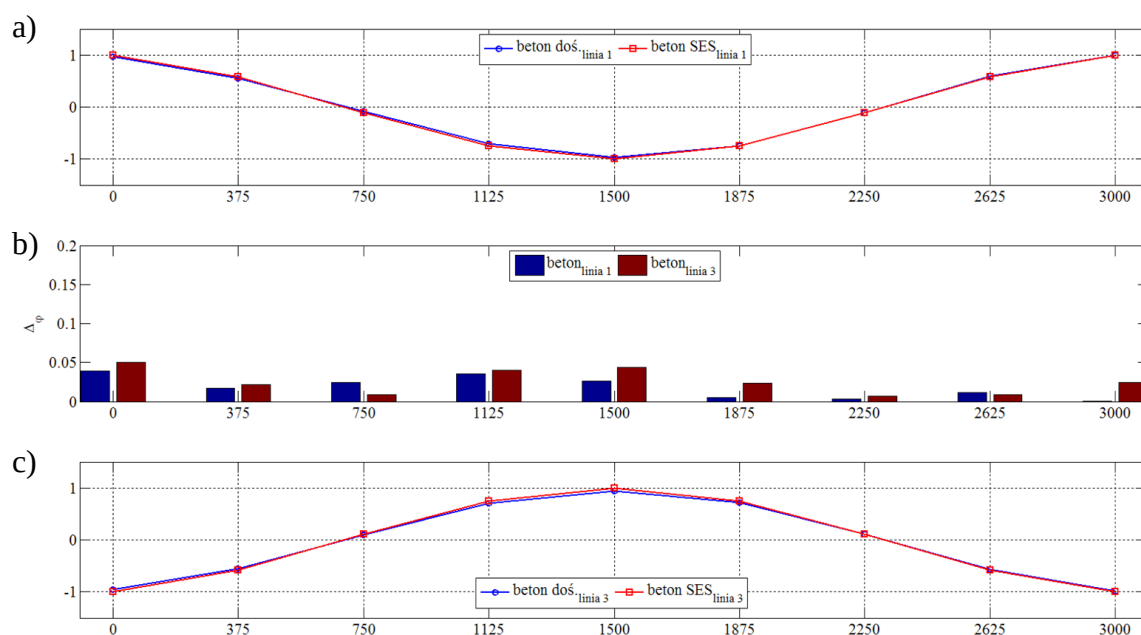
Rys. Z. 121 Porównanie drugiej formy drgań giętej doświadczalnej i obliczeniowej – belka C3: a) 2 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci $\Delta\phi$; c) 4 linia punktów pomiarowych leżących na kształtowniku stalowym



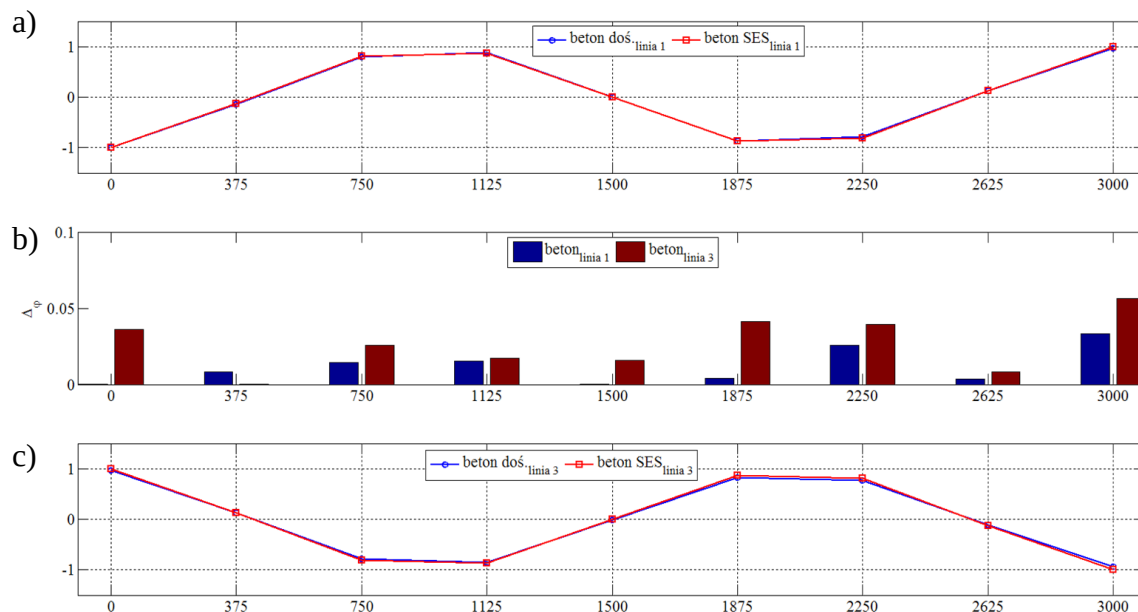
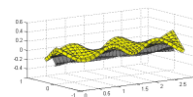
Rys. Z. 122 Porównanie trzeciej formy drgań giętej doświadczalnej i obliczeniowej – belka C3: a) 2 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci $\Delta\phi$; c) 4 linia punktów pomiarowych leżących na kształtowniku stalowym



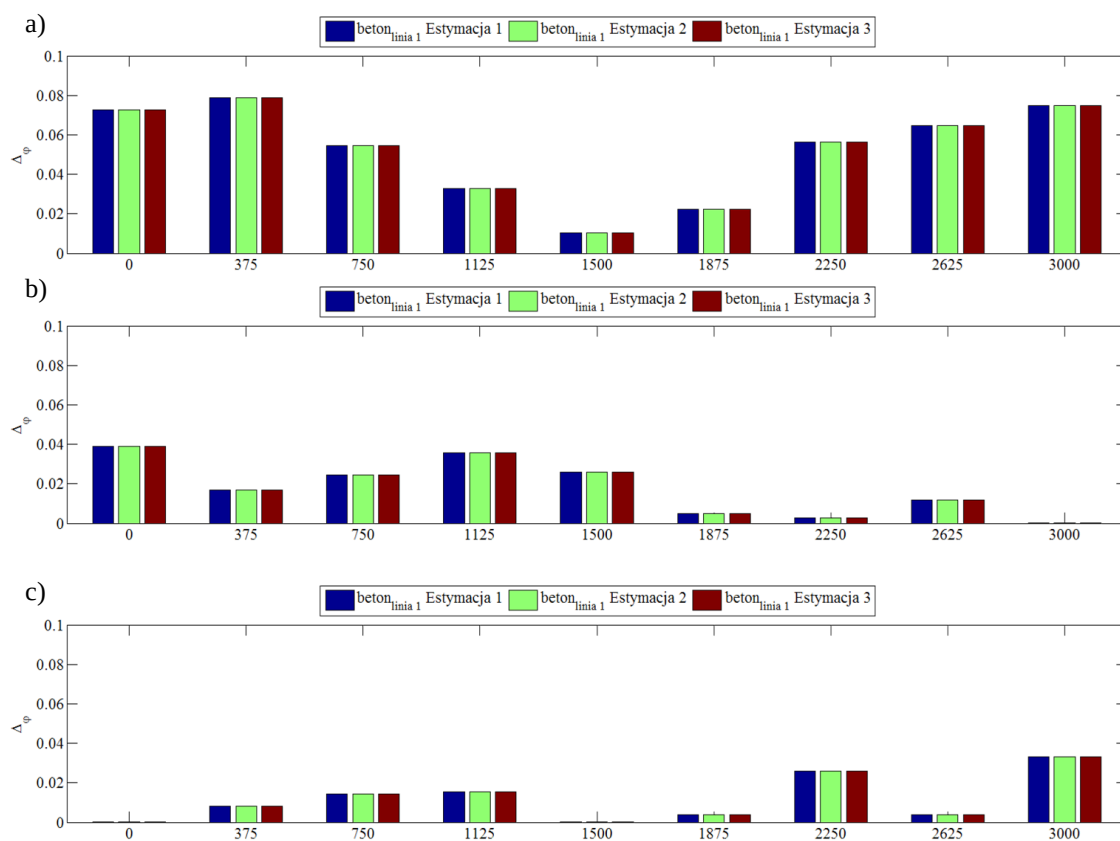
Rys. Z. 123 Porównanie pierwszej formy drgań skrętnych doświadczalnej i obliczeniowej – belka C3: a) 1 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci $\Delta\phi$; c) 3 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej



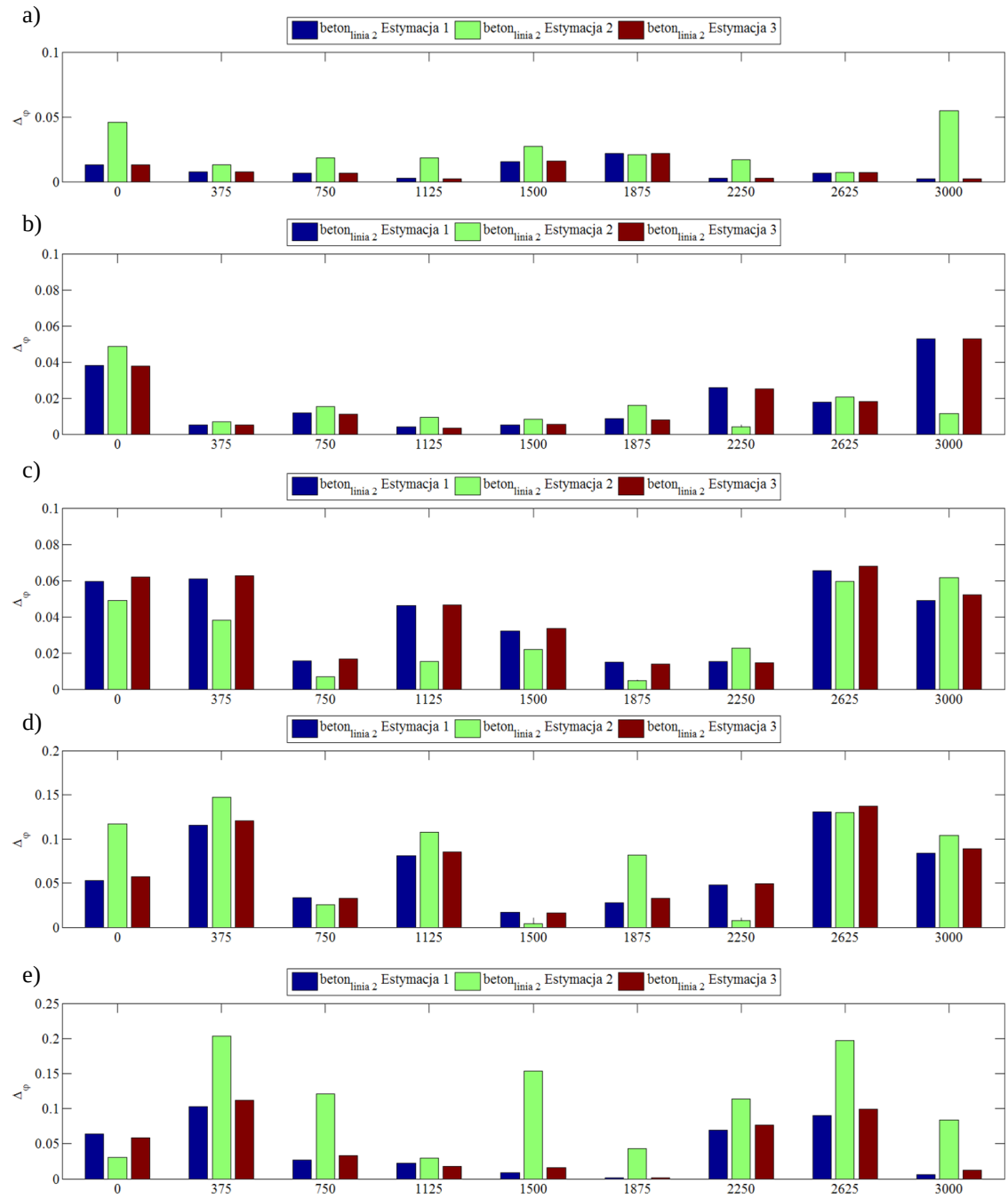
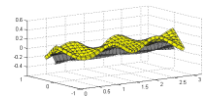
Rys. Z. 124 Porównanie drugiej formy drgań skrętnych doświadczalnej i obliczeniowej – belka C3: a) 1 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci $\Delta\phi$; c) 3 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej



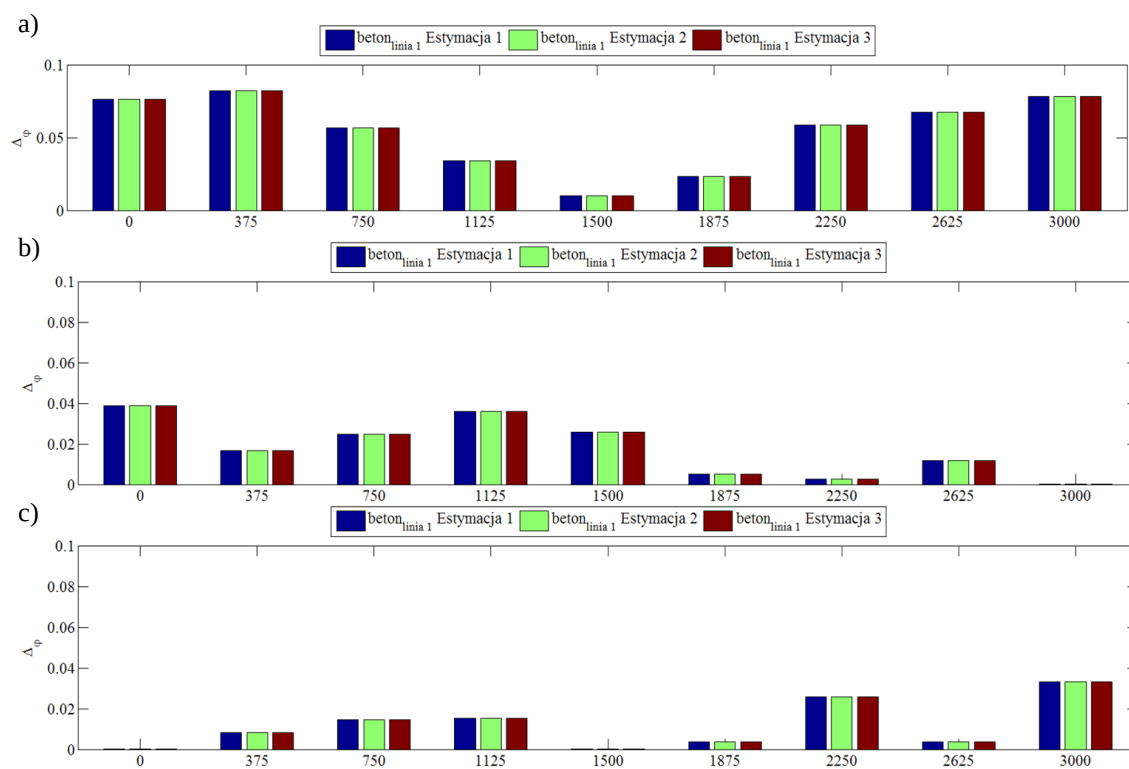
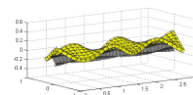
Rys. Z. 125 Porównanie trzeciej formy drgań skrętnej doświadczalnej i obliczeniowej – belka C3: a) 1 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej; b) porównanie dopasowania postaci Δ_ϕ ; c) 3 linia punktów pomiarowych leżących na płycie żelbetowej



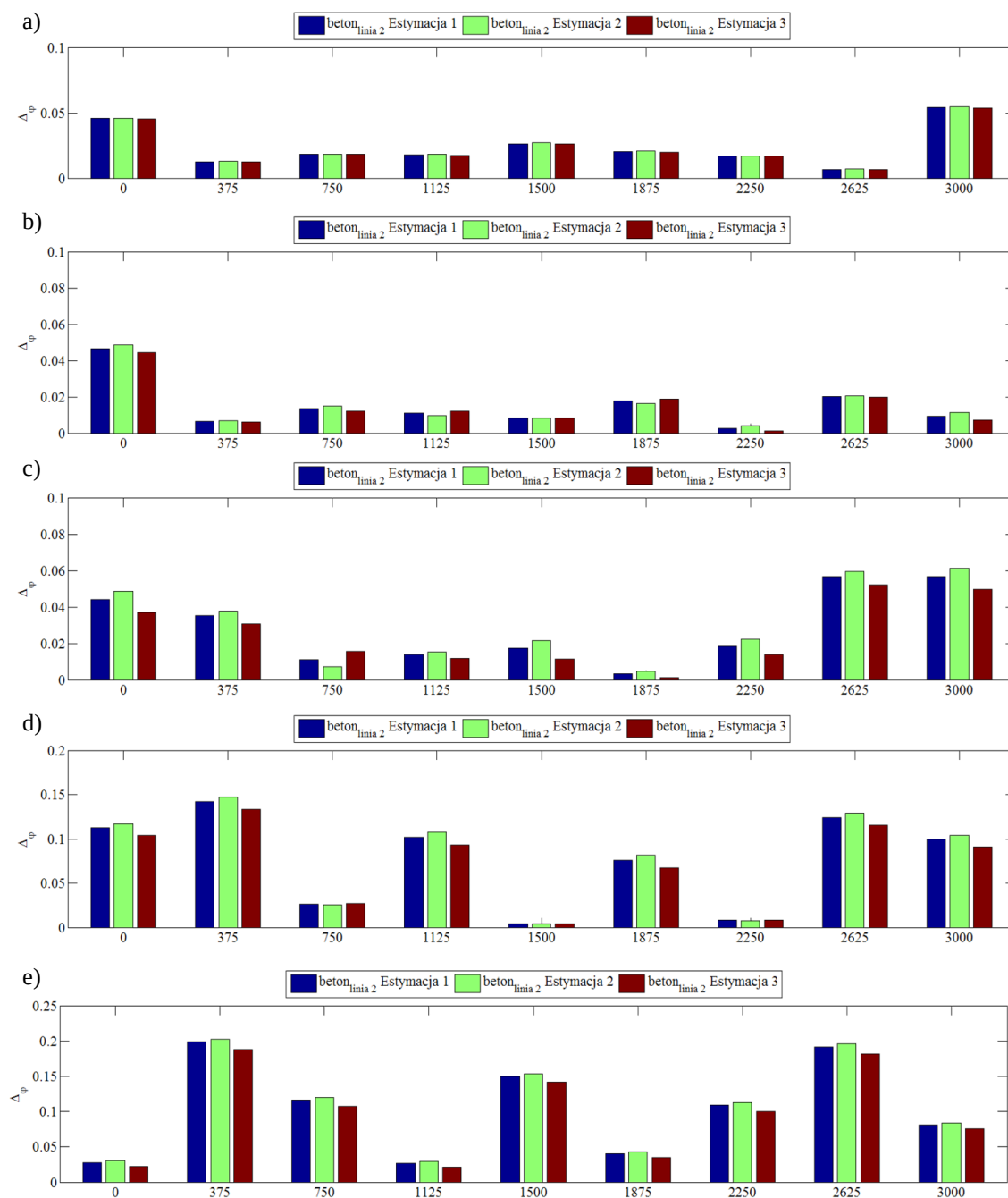
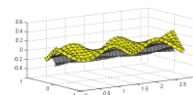
Rys. Z. 126 Porównanie dopasowania postaci drgań skrętnych $\Delta_{\phi,s}$ dla linii 1, dla Estymacji 1, 2 i 3 – belka C2: a) $\Delta_{\phi,1s}$; b) $\Delta_{\phi,2s}$; c) $\Delta_{\phi,3s}$



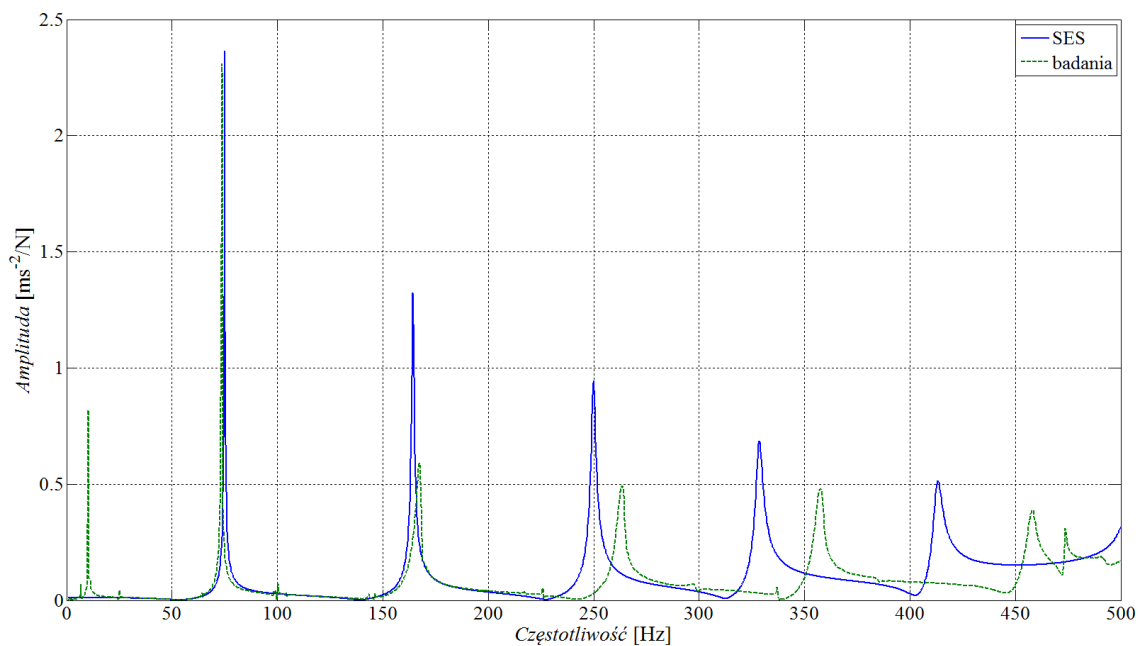
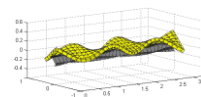
Rys. Z. 127 Porównanie dopasowania postaci drgań giętnych $\Delta\varphi,g$ dla linii 2, dla Estymacji 1, 2 i 3 – belka C2: a) $\Delta\varphi_{1g}$; b) $\Delta\varphi_{2g}$; c) $\Delta\varphi_{3g}$; d) $\Delta\varphi_{4g}$; e) $\Delta\varphi_{5g}$



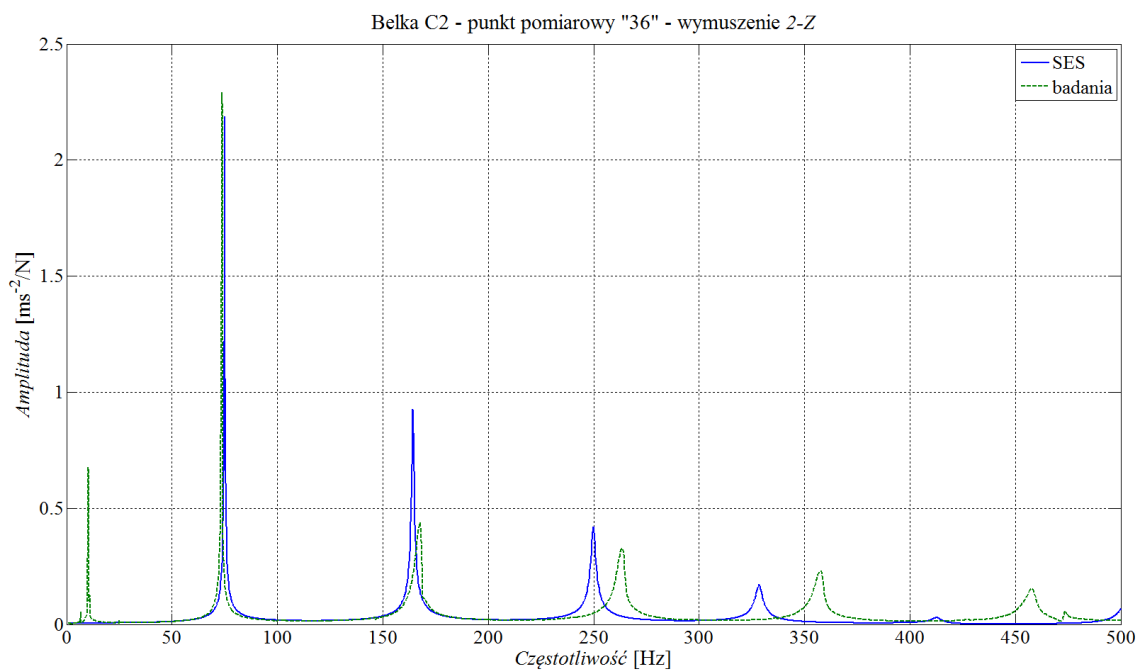
Rys. Z. 128 Porównanie dopasowania postaci drgań skrętnych $\Delta\varphi_s$ dla linii 1, dla Estymacji 1, 2 i 3 – belka C3: a) $\Delta\varphi_{1s}$; b) $\Delta\varphi_{2s}$; c) $\Delta\varphi_{3s}$



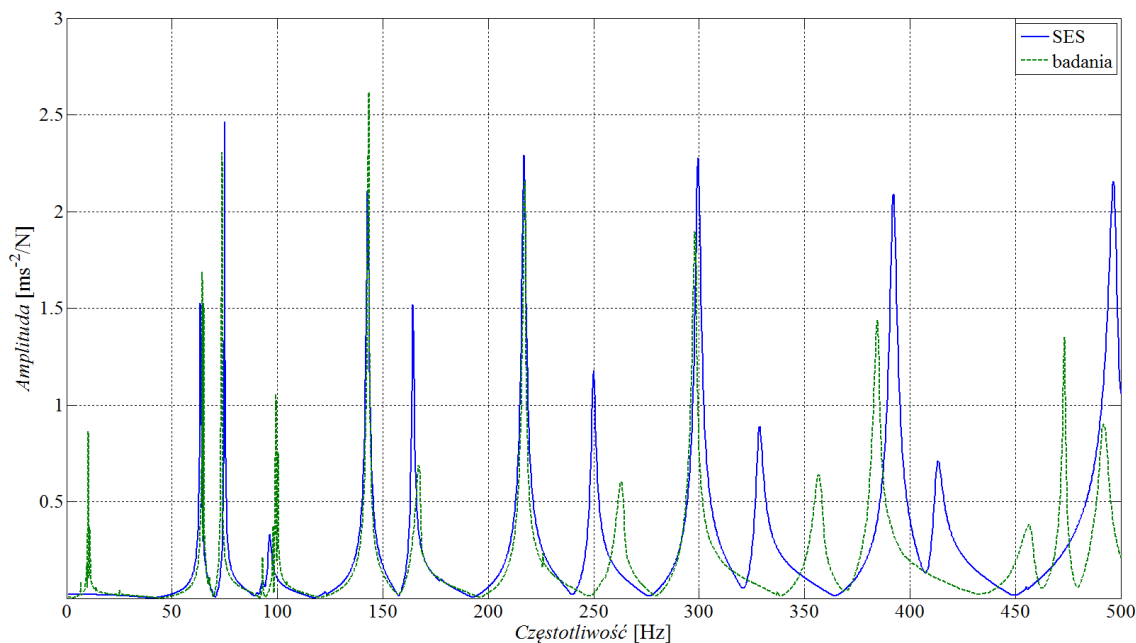
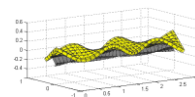
Rys. Z. 129 Porównanie dopasowania postaci drgań giętnych $\Delta_{\varphi,g}$ dla linii 2, dla Estymacji 1, 2 i 3 – belka C3: a) $\Delta_{\varphi,1g}$; b) $\Delta_{\varphi,2g}$; c) $\Delta_{\varphi,3g}$; d) $\Delta_{\varphi,4g}$; e) $\Delta_{\varphi,5g}$



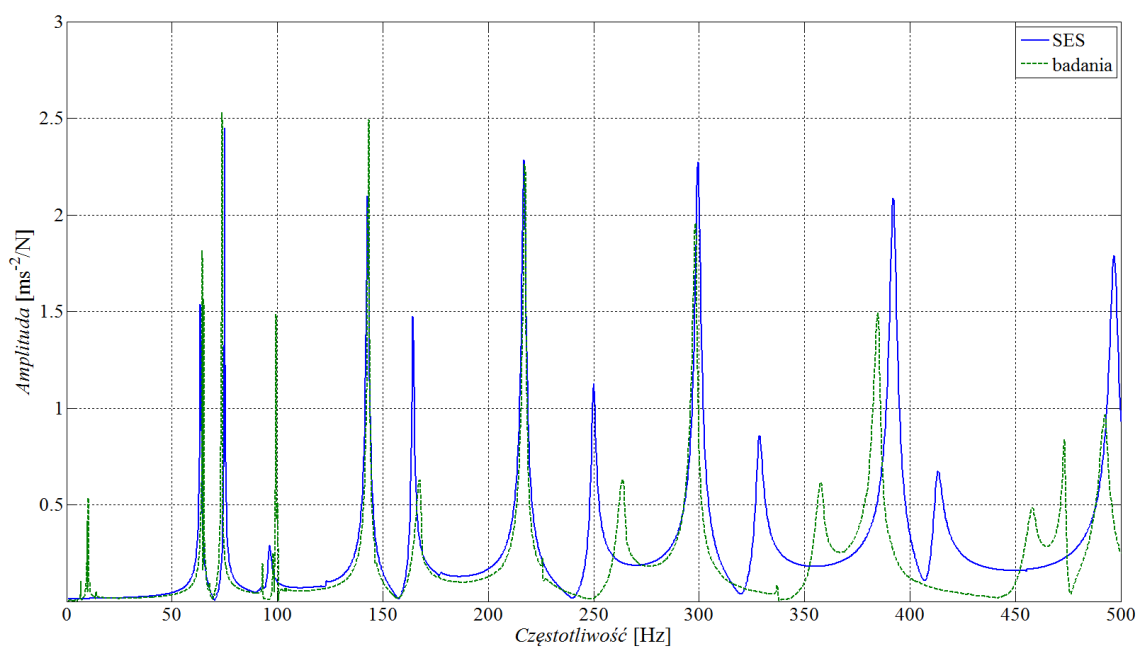
Rys. Z. 130 Porównanie doświadczonego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia przyspieszeń dla belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, punktu 1, kierunku Z, ESTAMACJA 1



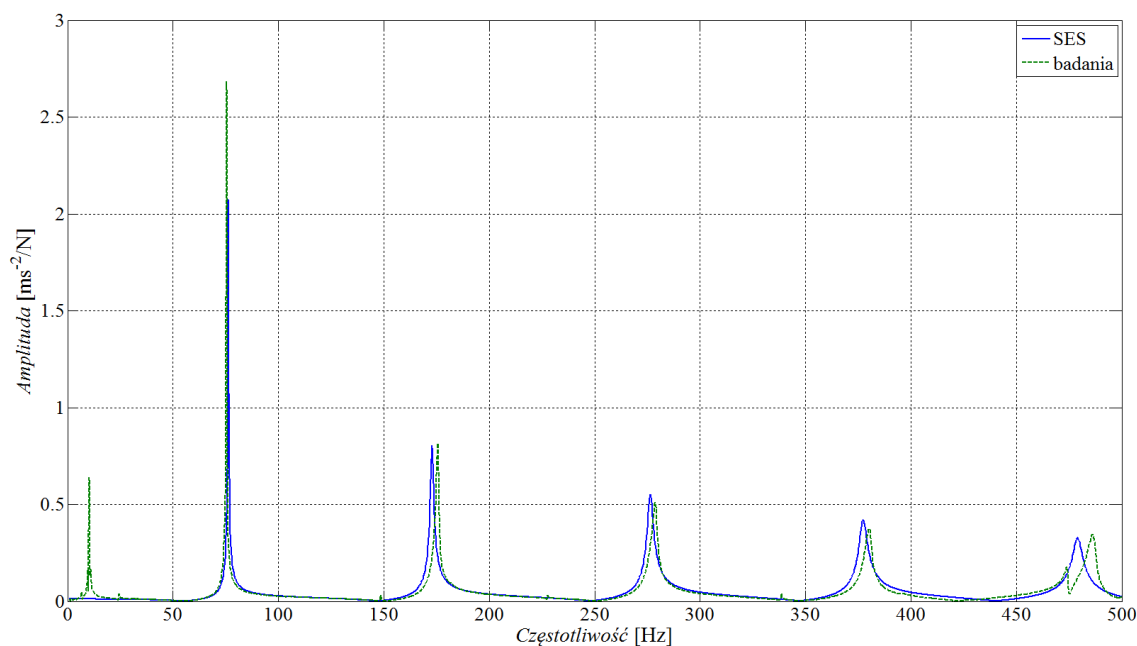
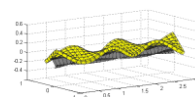
Rys. Z. 131 Porównanie doświadczonego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia przyspieszeń dla belki zespolonej C2, wymuszenie 2-Z, punktu 36, kierunku Z, ESTAMACJA 1



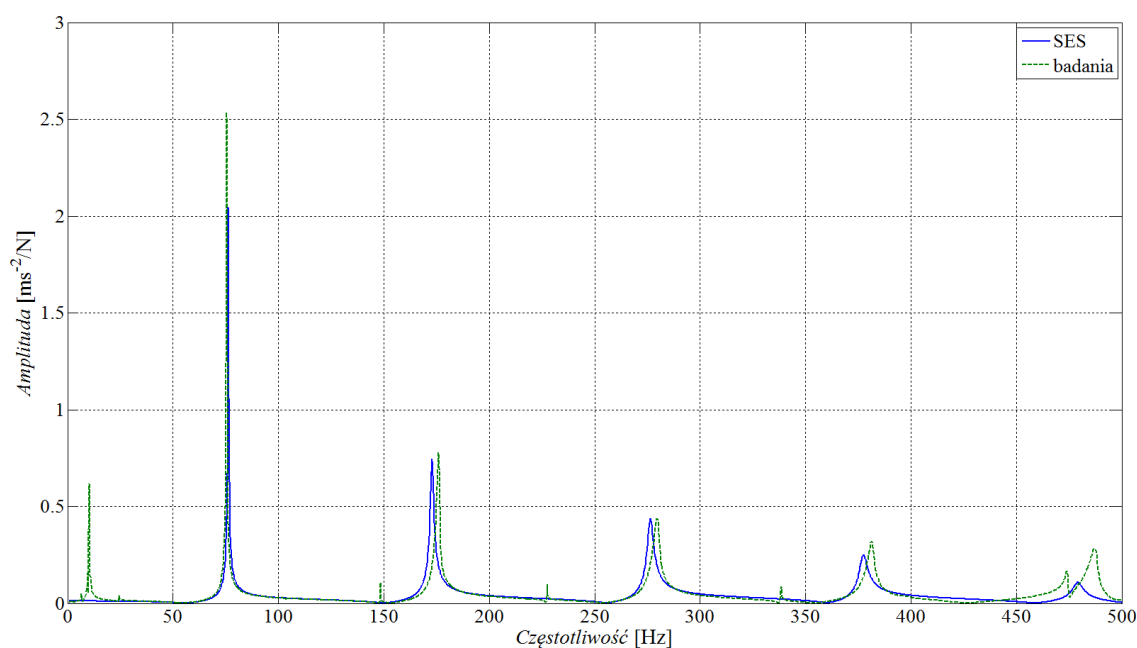
Rys. Z. 132 Porównanie doświadczonego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia przyspieszeń dla belki zespolonej C2, wymuszenie 1-Z, punktu 1, kierunek Z, ESTAMACJA 2



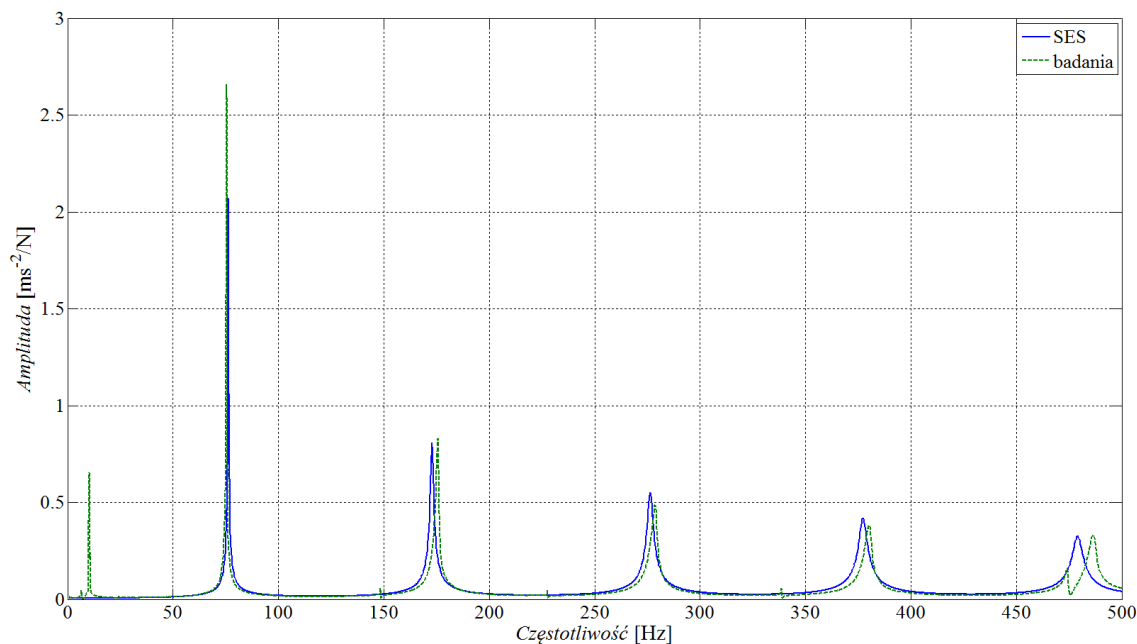
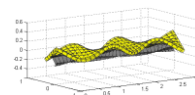
Rys. Z. 133 Porównanie doświadczonego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia przyspieszeń dla belki zespolonej C2, wymuszenie 1-Z, punktu 35, kierunek Z, ESTAMACJA 2



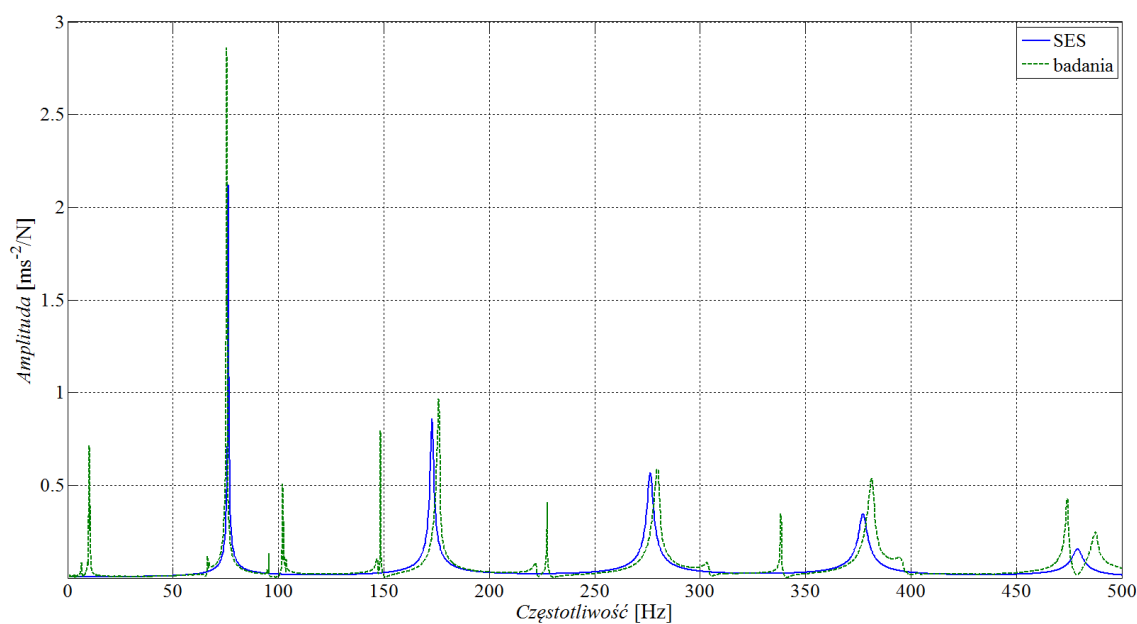
Rys. Z. 134 Porównanie doświadczonego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia przyspieszeń dla belki zespolonej C3, wymuszenie 2-Z, punktu 2, kierunek Z, ESTAMACJA 1



Rys. Z. 135 Porównanie doświadczonego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia przyspieszeń dla belki zespolonej C3, wymuszenie 2-Z, punktu 4, kierunek Z, ESTAMACJA 1



Rys. Z. 136 Porównanie doświadczonego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia przyspieszeń dla belki zespolonej C3, wymuszenie 1-Z, punktu 34, kierunek Z, ESTAMACJA 1



Rys. Z. 137 Porównanie doświadczonego i obliczeniowego przebiegów amplitud częstotliwościowej funkcji przejścia przyspieszeń dla belki zespolonej C3, wymuszenie 1-Z, punktu 36, kierunek Z, ESTAMACJA 1